

# **ÉLÉMENTS FINIS TÉTRAÉDRIQUES DE CLASSE $C^1$ ET DE DEGRÉ DEUX**

**THÈSE**

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université  
de Fribourg (Suisse)

pour l'obtention du grade de docteur ès sciences mathématiques

par

**MARCEL DÉLÈZE**

de Nendaz (Valais)

Thèse No 790

Acceptée par la Faculté des Sciences de l'Université  
de Fribourg (Suisse) sur la proposition de MM. les  
professeurs J. DESCLOUX et A. ANTILLE.

Fribourg, le 13 décembre 1978.

Le Doyen

F. P. EMMENEGGER

# AVANT-PROPOS.

En janvier 1976, M. D  l  ze et J.-J. Goël publièrent le premier élément fini de classe  $C^1$  défini sur un tétraèdre [6]. Accompagné d'un autre élément de degré plus élevé, cet élément fini fit l'objet d'un article dans "International journal for numerical methods in engineering" [7].

Pour distinguer ce premier élément des versions ultérieures, nous l'avons baptisé variante I-A. Il s'agit d'un élément à 16 paramètres; ce sont, à chaque sommet du tétraèdre, la valeur de la fonction et de ses trois dérivées partielles. Les interpolants sur un tétraèdre sont définis à partir de 44 fonctions de référence, à savoir 16 polynômes de degré  $\leq 3$ , 12 polynômes par morceaux de degré  $\leq 3$  et 16 fonctions rationnelles par morceaux.

La forme de ces dernières fonctions est lourde et compliquée. Cette thèse vise à déterminer des fonctions de référence un peu plus simples. Nous avons abouti à deux éléments finis améliorés, la variante I-C et la variante II. Les méthodes que nous avons développées sont assez générales et peuvent apporter une contribution à la construction d'autres éléments finis. La construction a été complétée par l'analyse de l'erreur d'interpolation dans les espaces de SOBOLEV.

\*\*\*\*\*

Cette publication a été faite avec l'appui financier du Conseil de l'Université de Fribourg.

# **ÉLÉMENTS FINIS TÉTRAÉDRIQUES DE CLASSE $C^1$ ET DE DEGRÉ DEUX**

**THÈSE**

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université  
de Fribourg (Suisse)

pour l'obtention du grade de docteur ès sciences mathématiques

par

**MARCEL DÉLÈZE**

de Nendaz (Valais)

Thèse No 790

## TABLE DES MATIERES.

### 1. Introduction.

### 2 à 6. CONSTRUCTION.

2. Interpolation linéaire abstraite.

3. Eléments finis triangulaires de classe  $C^1$ .

4. Elément polynomial de référence, de classe  $C^0$ ,  
de degré deux, à 16 paramètres.

5. Variante II, construction.

6. Variante I-C, construction.

### 7 et 8. PROGRAMMES.

7. Variante II, programme.

8. Variante I-C, programme.

### 9. ERREUR D'INTERPOLATION.

### 10. Remarques sur l'utilisation pratique des éléments.

### Bibliographie.



## § 1 INTRODUCTION.

1.1. Définitions.

Tous les éléments finis dont nous parlerons seront des éléments finis droits, c'est-à-dire définis sur des polyèdres de  $\mathbb{R}^n$ .

Définition 1.

Un élément fini est un triplet  $(K, Q, V)$  où

- (i)  $K$  est un polyèdre compact de  $\mathbb{R}^n$  dont l'intérieur n'est pas vide;
- (ii)  $V$  est un sous-espace linéaire de  $C^S(\bar{K})$ ;
- (iii)  $Q: C^S(\bar{K}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$  est une application dont les composantes  $Q_1, \dots, Q_N$ , appelées paramètres, sont de la forme
 
$$Q_i(v) = v(A_i), \quad A_i \in K,$$
 ou bien  $Q_i(v) = Dv(A_i)(\xi_{i1}), \dots,$ 
 ou bien  $Q_i(v) = D^S_{V(A_i)}(\xi_{i1}, \dots, \xi_{is}),$ 

$$\xi_{i1}, \dots, \xi_{is} \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, N.$$
- (iv) La restriction  $Q|_V$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 2.

L'interpolation associée à un élément fini  $(K, Q, V)$  est l'application linéaire

$$\pi: C^S(\bar{K}) \longrightarrow V,$$

$$\pi(f) := (Q|_V)^{-1}(Qf).$$

Définition 3.

Désignons par  $\{e_1, \dots, e_N\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ . La base de Lagrange d'un élément fini  $(K, Q, V)$  désigne la base  $\{Q^{-1}(e_1), \dots, Q^{-1}(e_N)\}$  de  $V$ .

Lorsqu'un des paramètres est une dérivée d'ordre  $\geq 1$ , la base de Lagrange est aussi appelée base d'Hermite.

Définition 4.

Un élément fini  $(K, Q, V)$  est dit de degré  $k$ :  $\Leftrightarrow V$  contient tous les polynômes  $p: K \rightarrow \mathbb{R}$  de degré  $\leq k$ .

Un élément fini  $(K, Q, V)$  est dit polynomial:  $\Leftrightarrow$  tous les éléments de  $V$  sont des polynômes.

Définition 5.

Nous introduisons les espaces de SOBOLEV. Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega); \text{ support de } \varphi \text{ compact dans } \Omega\}.$$

Pour les multi-indices  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , nous notons

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Soit  $v \in L^2(\Omega)$ . On dit que  $\partial^\alpha v \in L^2(\Omega)$  si et seulement si il existe une fonction de  $L^2(\Omega)$  notée  $\partial^\alpha v$  telle que  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \partial^\alpha v \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \partial^\alpha \varphi.$$

L'espace

$$H^m(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega); \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leq m\}$$

est muni des semi-normes



$$|v|_{j,\Omega} := \left\{ \sum_{|\alpha|=j} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} v|^2 \right\}^{1/2}, \quad j = 0(1)m,$$

et de la norme

$$\|v\|_{m,\Omega} := \left\{ \sum_{j=0}^m |v|_{j,\Omega}^2 \right\}^{1/2}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

On définit  $H_0^m(\Omega)$  comme étant l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^m(\Omega)$  relativement à la norme  $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ .

#### Définition 6.

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $k \geq 1$ . Une fonction  $v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^k$  presque partout:  $\Leftrightarrow v \in C^{k-1}(\bar{\Omega})$  et il existe dans  $\mathbb{R}^n$  des ouverts disjoints à bords lipschitziens  $U_1, \dots, U_N$  tels que  $\bigcup_{i=1}^N \bar{U}_i = \bar{\Omega}$  et  $v|_{U_i} \in C^k(U_i)$  pour  $i = 1, \dots, N$ .

#### Remarque.

Contrairement à la définition des fonctions de classe  $C^k$  par morceaux, nous n'exigeons pas que  $v|_{\bar{U}_i} \in C^k(\bar{U}_i)$  pour  $i = 1, \dots, N$ .

#### Exemple.

Sur le triangle

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, 1-x-y > 0\},$$

considérons la fonction

$$v(x,y) := \frac{x^2 y}{x+y}.$$

Nous allons montrer que  $v$  est de classe  $C^2$  presque partout, que ses dérivées partielles d'ordre deux sont bornées, mais que  $v$  n'est pas de classe  $C^2(\bar{\Omega})$ .

Remarquons d'abord que, dans  $\Omega$ , nous avons

$$0 < \frac{x}{x+y} < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{y}{x+y} < 1.$$

Les dérivées partielles

$$\partial_x v(x,y) = \frac{2xy}{x+y} - \frac{x^2 y}{(x+y)^2},$$

$$\partial_y v(x,y) = \frac{x^2}{x+y} - \frac{x^2 y}{(x+y)^2}$$

se laissent prolonger continûment en  $(0,0)$  et, par suite,  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ . Par contre,

$$\partial_x^2 v(x,y) = \frac{2y}{x+y} - \frac{4xy}{(x+y)^2} + \frac{2x^2 y}{(x+y)^3}$$

ne se laisse pas prolonger continûment en  $(0,0)$  puisque

$$\partial_x^2 v(0,y) = 2 \quad \forall y > 0,$$

$$\partial_x^2 v(x,0) = 0 \quad \forall x > 0.$$

Cependant,  $\partial_x^2 v$  reste borné dans  $\Omega$ .

On obtient des résultats analogues pour  $\partial_x \partial_y v$  et  $\partial_y^2 v$ .

#### Définition 7.

Soit  $\Omega$  un polyèdre ouvert borné dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous appelons mosaïque de tétraèdres une décomposition de  $\bar{\Omega}$  en un nombre fini de tétraèdres fermés  $S_1, \dots, S_M$  satisfaisant

$$(i) \quad \bar{\Omega} = \bigsqcup_{m=1}^M S_m,$$

(ii) pour  $\ell \neq m$ ,  $S_\ell \cap S_m$  est soit vide, soit un sommet commun à  $S_\ell$  et  $S_m$ , soit une arête commune à  $S_\ell$  et  $S_m$ , soit une face commune à  $S_\ell$  et  $S_m$ .

Définition 8.

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,

$T$  un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m$  avec

$$T \cap \Omega \neq \emptyset \text{ et } 1 \leq m < n,$$

$v: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Nous dirons que " $v|_{T \cap \Omega}$ , considéré comme une fonction de  $m$  variables, est un polynôme de degré  $\leq k$ " ou bien que " $v|_{T \cap \Omega}$  est un polynôme de degré  $\leq k$  à  $m$  variables" si et seulement si, pour une paramétrisation affine  $p: \mathbb{R}^m \longrightarrow T$ , la fonction  $v \circ p$  définie sur  $p^{-1}(T \cap \Omega)$  est un polynôme de degré  $\leq k$ .

Notation.

Soient  $\Omega$  ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $A \in \bar{\Omega}$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Nous utiliserons la notation suivante

$$\partial_{\xi} v(A) := Dv(A)(\xi)$$

c'est-à-dire

$$\partial_{\xi} v(A) = \xi_1 \partial_{x_1} v(A) + \dots + \xi_n \partial_{x_n} v(A).$$

1.2. Enoncé du problème élément fini.

Soit  $S$  un tétraèdre fermé, non dégénéré, de sommets  $A_1, A_2, A_3, A_4$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous cherchons un espace linéaire  $V = V(S) \subset C^1(\bar{S})$  possédant les propriétés suivantes.

- (i) Les fonctions de  $V$  sont de classe  $C^2$  presque partout; leurs dérivées partielles d'ordre deux sont bornées.
- (ii)  $V$  contient tous les polynômes de degré  $\leq 2$  à trois variables.

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$\begin{aligned} v(A_i) &= C_{4i-3} & \partial_x v(A_i) &= C_{4i-2} \\ \partial_y v(A_i) &= C_{4i-1} & \partial_z v(A_i) &= C_{4i} , \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{4i-3}(v) &:= v(A_i), & Q_{4i-2}(v) &:= \partial_x v(A_i), \\ Q_{4i-1}(v) &:= \partial_y v(A_i), & Q_{4i}(v) &:= \partial_z v(A_i), \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

La propriété (iii) exprime que  $(S, Q, V)$  est un élément fini.

En particulier,  $\dim V = 16$ .

Remarque 3.

La propriété (ii) s'énonce aussi "l'élément fini  $(S, Q, V)$  est de degré deux".

Définition 1.

Soit  $\mathcal{Y}$  l'ensemble des tétraèdres non dégénérés de  $\mathbb{R}^3$ . Une solution du problème élément fini ci-dessus est une famille d'éléments finis

$$\{(S, Q(S), V(S)); S \in \mathcal{Y}\}.$$

Une telle famille sera caractérisée par un élément fini générique, c'est-à-dire un élément  $(S, Q(S), V(S))$  où  $S \in \mathcal{Y}$  est un paramètre libre.

Définition 2.

Soient  $(S, Q(S), V(S))$  un élément fini générique solution,

$\Omega$  un polyèdre ouvert borné dans  $\mathbb{R}^3$ ,

$S_1, \dots, S_M$  une mosaïque de tétraèdres sur  $\Omega$ ,

$\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1, \dots, S_M$ .

A  $4K$  nombres réels  $c_{0k}, c_{1k}, c_{2k}, c_{3k}$ ,  $k = 1(1)K$ , donnés, on fait correspondre une fonction  $w: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$w|_{S_m} \in V(S_m) \text{ pour } m = 1(1)M \text{ et}$$

$$w(A_k) = c_{0k} \quad \partial_x w(A_k) = c_{1k}$$

$$\partial_y w(A_k) = c_{2k} \quad \partial_z w(A_k) = c_{3k}, \quad k = 1(1)K.$$

L'ensemble  $W$  des fonctions  $w$  ainsi construites est appelé espace de type élément fini associé à la mosaïque.

Définition 3.

La première partie de la propriété (iv)

$$"v_1 \text{ et } v_2 \text{ coïncident sur } S_1 \cap S_2"$$

a la conséquence suivante

$$"pour toute mosaïque de tétraèdres sur un  $\Omega$ , l'espace de type élément fini associé  $W$  est inclu dans  $C^0(\bar{\Omega})"$ .$$

On dit alors que l'élément fini générique  $(S, Q(S), V(S))$  est de classe  $C^0$ .

La propriété (iv) entraîne que, pour toute mosaïque de tétraèdres sur un  $\Omega$ , l'espace de type élément fini associé est dans  $C^1(\bar{\Omega})$ .

On dit alors que l'élément fini générique  $(S, Q(S), V(S))$  est de classe  $C^1$ .

Définition 4.

Soient  $(S, Q(S), V(S))$  un élément fini générique solution,

$S_1, \dots, S_M$  une mosaïque de tétraèdres sur  $\Omega$ ,

$W$  l'espace de type élément fini associé,

$\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1, \dots, S_M$ .

On définit l'interpolation globale

$$\pi: C^1(\bar{\Omega}) \longrightarrow W$$

par  $\pi(f) := w$  où  $w$  est la fonction de type élément fini satisfaisant

$$\begin{aligned} w(A_k) &= f(A_k) & \partial_x w(A_k) &= \partial_x f(A_k) \\ \partial_y w(A_k) &= \partial_y f(A_k) & \partial_z w(A_k) &= \partial_z f(A_k), \\ k &= 1(1)K. \end{aligned}$$

Proposition.

Soient  $(S, Q(S), V(S))$  un élément fini générique solution,

$S_1, \dots, S_M$  une mosaïque de tétraèdres sur  $\Omega$ ,

$W$  l'espace de type élément fini associé.

Les inclusions

$$V(S_m) \subset H^2(S_m), \quad m = 1(1)M,$$

$$W \subset C^1(\bar{\Omega})$$

entraînent que

$$(i) \quad W \subset H^2(\Omega),$$

$$(ii) \quad \{w \in W; w|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$$(iii) \quad \{w \in W; w|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H_0^2(\Omega),$$

$\frac{\partial}{\partial \nu}$  désignant la dérivée normale au bord du polyèdre  $\Omega$ .

Démonstration.

Cette proposition est un cas particulier d'un théorème connu.

Voir par exemple CIARLET [3], Theorem 2.1.2.

1.3. Les solutions du problème élément fini.Définition.

Soit  $(S, Q(S), V(S))$  un élément fini générique, solution du problème élément fini 1.2.

Soit  $\tilde{S}$  le tétraèdre de référence de sommets

$$\tilde{A}_1 = (0, 0, 0), \quad \tilde{A}_2 = (1, 0, 0), \quad \tilde{A}_3 = (0, 1, 0), \quad \tilde{A}_4 = (0, 0, 1).$$

Soit  $L: \tilde{S} \longrightarrow S$  l'application affine définie par  $L(\tilde{A}_i) = A_i$ ,

$i = 1(1)4$ .

Nous appelons espace de référence de l'élément fini générique tout sous-espace linéaire  $\tilde{U} \subset C^1(\bar{S})$  de dimension finie tel que, pour tout  $S$ ,

$$V(S) \subset \{\tilde{u} \circ L^{-1}; \tilde{u} \in \tilde{U}\}.$$

Corollaire et définition.

Soit  $\tilde{U}$  un espace de référence de l'élément fini générique  $(S, Q(S), V(S))$ . Alors  $v \in V(S)$  peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire

$$v = \sum_{j=1}^J s_j \tilde{u}_j \circ L^{-1}$$

où  $\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_J\}$  est un système générateur de  $\tilde{U}$  fixé indépendamment de  $S$ . Les fonctions  $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_J$  sont alors appelées fonctions de référence de l'élément générique.

Les solutions du problème élément fini.

Nous avons construit deux éléments finis génériques

$$(S, Q(S), V^I(S)) \quad (\text{variante I-C}),$$

$$(S, Q(S), V^{II}(S)) \quad (\text{variante II})$$

qui sont solutions du problème élément fini 1.2.

La variante I-C s'exprime avec 44 fonctions de référence (voir § 6). Ce sont 16 polynômes de degré  $\leq 3$ , 12 polynômes par morceaux de degré  $\leq 3$  et 16 fonctions rationnelles par morceaux (voir 6.2).

Un espace de référence n'apparaît pas immédiatement lors de la construction de la variante II (voir § 5). Un élément



Proposition.

Soient  $(S, Q(S), V(S))$  un élément fini générique solution,

$S_1, \dots, S_M$  une mosaïque de tétraèdres sur  $\Omega$ ,

$W$  l'espace de type élément fini associé.

Les inclusions

$$V(S_m) \subset H^2(S_m), \quad m = 1(1)M,$$

$$W \subset C^1(\bar{\Omega})$$

entraînent que

$$(i) \quad W \subset H^2(\Omega),$$

$$(ii) \quad \{w \in W; w|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$$(iii) \quad \{w \in W; w|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H_0^2(\Omega),$$

$\frac{\partial}{\partial \nu}$  désignant la dérivée normale au bord du polyèdre  $\Omega$ .

Démonstration.

Cette proposition est un cas particulier d'un théorème connu.

Voir par exemple CIARLET [3], Theorem 2.1.2.

1.3. Les solutions du problème élément fini.Définition.

Soit  $(S, Q(S), V(S))$  un élément fini générique, solution du problème élément fini 1.2.

Soit  $\tilde{S}$  le tétraèdre de référence de sommets

$$\tilde{A}_1 = (0, 0, 0), \quad \tilde{A}_2 = (1, 0, 0), \quad \tilde{A}_3 = (0, 1, 0), \quad \tilde{A}_4 = (0, 0, 1).$$

Soit  $L: \tilde{S} \longrightarrow S$  l'application affine définie par  $L(\tilde{A}_i) = A_i$ ,

$i = 1(1)4$ .

La troisième partie analyse l'ordre de l'erreur d'interpolation (paragraphe 9). Nous montrerons que nos éléments finis satisfont aux majorations usuelles pour des éléments de degré deux.

L'exposé s'achève par des remarques sur l'intégration numérique au moyen de tableaux de référence (paragraphe 10).

#### 1.4. Application à l'équation biharmonique.

Soit le problème de la dynamique des fluides

$$\Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

où  $\Omega$  est un polyèdre ouvert borné connexe dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $f \in L^2(\Omega)$

et  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  est la dérivée normale au bord de  $\Omega$ . Ce problème est considéré sous la forme variationnelle

$$\text{trouver } u \in H_0^2(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

$$a(u, v) = b(v)$$

$$\text{où } a: H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) := \int_{\Omega} \Delta u \Delta v,$$

$$b: H_0^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad b(v) := \int_{\Omega} f v.$$

La forme bilinéaire continue  $a$  est  $H_0^2(\Omega)$ -elliptique, c'est-à-dire

$\exists c > 0$  tel que

$$\forall v \in H_0^2(\Omega) \quad a(v, v) \geq c \|v\|_{2, \Omega}^2.$$

Pour une suite régulière de mosaïques  $\{S_{1,n}, \dots, S_{K_n,n}\}, n \in \mathbb{N}$ , sur  $\Omega$  (voir 9.5), définissons  $h_n := \max_{k=1(1)K_n} \text{diam}(S_{k,n})$ ;

désignons par  $V_n$  l'espace des fonctions de type élément fini  $v_n$  associées à la  $n$ -ème mosaïque et satisfaisant

$$v_n|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_n}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Le problème discrétisé selon la méthode de RAYLEIGH - RITZ-GALERKIN s'énonce

$$\text{trouver } u_n \in V_n \text{ tel que } \forall v_n \in V_n$$

$$a(u_n, v_n) = b(v_n).$$

A partir du théorème 9.5, on démontre le théorème suivant par des arguments classiques.

Théorème.

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{2,\Omega} = 0 ;$$

(ii) il existe une constante  $c$  ne dépendant que de  $\Omega$  et de la suite des mosaïques telle que si  $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$

alors  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\|u - u_n\|_{2,\Omega} \leq c h_n |u|_{3,\Omega}.$$

Remarque.

Dans [4], CIARLET et RAVIART ont décrit une méthode non conforme pour résoudre l'équation biharmonique à  $n$  variables. Pour obtenir une majoration analogue à (ii) ci-dessus, ils ont dû supposer  $u \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ .

Proposition.

Soient  $(S, Q(S), V(S))$  un élément fini générique solution,

$S_1, \dots, S_M$  une mosaïque de tétraèdres sur  $\Omega$ ,

$W$  l'espace de type élément fini associé.

Les inclusions

$$V(S_m) \subset H^2(S_m), \quad m = 1(1)M,$$

$$W \subset C^1(\bar{\Omega})$$

entraînent que

$$(i) \quad W \subset H^2(\Omega),$$

$$(ii) \quad \{w \in W; w|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$$(iii) \quad \{w \in W; w|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H_0^2(\Omega),$$

$\frac{\partial}{\partial \nu}$  désignant la dérivée normale au bord du polyèdre  $\Omega$ .

Démonstration.

Cette proposition est un cas particulier d'un théorème connu.

Voir par exemple CIARLET [3], Theorem 2.1.2.

1.3. Les solutions du problème élément fini.Définition.

Soit  $(S, Q(S), V(S))$  un élément fini générique, solution du problème élément fini 1.2.

Soit  $\tilde{S}$  le tétraèdre de référence de sommets

$$\tilde{A}_1 = (0, 0, 0), \quad \tilde{A}_2 = (1, 0, 0), \quad \tilde{A}_3 = (0, 1, 0), \quad \tilde{A}_4 = (0, 0, 1).$$

Soit  $L: \tilde{S} \longrightarrow S$  l'application affine définie par  $L(\tilde{A}_i) = A_i$ ,

$i = 1(1)4$ .

Proposition.

Soient  $(S, Q(S), V(S))$  un élément fini générique solution,

$S_1, \dots, S_M$  une mosaïque de tétraèdres sur  $\Omega$ ,

$W$  l'espace de type élément fini associé.

Les inclusions

$$V(S_m) \subset H^2(S_m), \quad m = 1(1)M,$$

$$W \subset C^1(\bar{\Omega})$$

entraînent que

$$(i) \quad W \subset H^2(\Omega),$$

$$(ii) \quad \{w \in W; w|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$$(iii) \quad \{w \in W; w|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H_0^2(\Omega),$$

$\frac{\partial}{\partial \nu}$  désignant la dérivée normale au bord du polyèdre  $\Omega$ .

Démonstration.

Cette proposition est un cas particulier d'un théorème connu.

Voir par exemple CIARLET [3], Theorem 2.1.2.

1.3. Les solutions du problème élément fini.Définition.

Soit  $(S, Q(S), V(S))$  un élément fini générique, solution du problème élément fini 1.2.

Soit  $\tilde{S}$  le tétraèdre de référence de sommets

$$\tilde{A}_1 = (0,0,0), \quad \tilde{A}_2 = (1,0,0), \quad \tilde{A}_3 = (0,1,0), \quad \tilde{A}_4 = (0,0,1).$$

Soit  $L: \tilde{S} \longrightarrow S$  l'application affine définie par  $L(\tilde{A}_i) = A_i$ ,

$i = 1(1)4$ .

Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$

- (iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

où  $M_1$  est une matrice  $p \times p$  inversible,  
 $N_1$  désigne une matrice  $q \times p$  quelconque,  
 $M_0$  est une matrice  $q \times q$  inversible.

Alors

(i)  $(u_1, \dots, u_p, E_2^{-1} u_1, \dots, E_2^{-1} u_p, \dots, E_m^{-1} u_1, \dots, E_m^{-1} u_p, v_1, \dots, v_q)$   
est une base d'interpolation de  $Q$ ;

(ii) la matrice d'interpolation relative à cette base est de  
la forme

$$[Q] = \left( \begin{array}{ccc|c} M_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & M_1 & \\ \hline N_1 & \dots & N_m & M_0 \end{array} \right),$$

où  $N_2, \dots, N_m$  sont des matrices  $q \times p$ .

Cette proposition est également valable pour  $q = 0$ .

#### Démonstration.

Pour démontrer la proposition, nous calculons l'image par  $Q$   
des  $n$  vecteurs proposés sous (i) et nous montrons que la matrice  
d'interpolation correspondante est de la forme (ii), donc inversible.

Il suffit de considérer le premier bloc diagonal  $mp \times mp$  de  $Q$ ;  
les blocs diagonaux  $p \times p$  de cette matrice sont

$$\begin{aligned} & (FE_i(E_i^{-1} u_1), \dots, FE_i(E_i^{-1} u_p)) \\ &= (F u_1, \dots, F u_p) = M_1, \quad i = 1(1)m; \end{aligned}$$



les blocs non diagonaux  $p \times p$  de cette matrice sont

$$\begin{aligned} & (FE_i(E_j^{-1} u_1), \dots, FE_i(E_j^{-1} u_p)) \\ &= (FE_{\sigma(i,j)} u_1, \dots, FE_{\sigma(i,j)} u_p) = 0; \end{aligned}$$

en effet, lorsque  $i \neq j$ ,  $E_{\sigma(i,j)} := E_i \circ E_j^{-1}$  n'est pas l'élément neutre.



### Exemple.

Soient  $\tilde{W} := \{w: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, w \text{ polynôme de degré } \leq 3\}$ ,

$$\alpha_1, \alpha_2: [0,1] \rightarrow [0,1], \alpha_1(x) := x, \alpha_2(x) := 1-x,$$

$$E_1, E_2: \tilde{W} \rightarrow \tilde{W}, E_i(w) := w \circ \alpha_i, i = 1, 2,$$

$$\tilde{F}: \tilde{W} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{F}w := \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix}.$$

Nous considérons le problème d'interpolation

$$\tilde{Q}w := \begin{pmatrix} \tilde{F}E_1 \\ \tilde{F}E_2 \end{pmatrix} (w) = \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \\ w(1) \\ -w'(1) \end{pmatrix}.$$

Nous choisissons la première partie d'une base d'interpolation

$$\tilde{u}_1(x) := (1-x)^3,$$

$$\tilde{u}_2(x) := (1-x)^2 x.$$

Nous obtenons

$$(Q(\tilde{u}_1), Q(\tilde{u}_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où la matrice  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$  est régulière.

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$\begin{aligned} v(A_i) &= C_{4i-3} & \partial_x v(A_i) &= C_{4i-2} \\ \partial_y v(A_i) &= C_{4i-1} & \partial_z v(A_i) &= C_{4i} , \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{4i-3}(v) &:= v(A_i), & Q_{4i-2}(v) &:= \partial_x v(A_i), \\ Q_{4i-1}(v) &:= \partial_y v(A_i), & Q_{4i}(v) &:= \partial_z v(A_i), \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

les blocs non diagonaux  $p \times p$  de cette matrice sont

$$\begin{aligned} & (FE_i(E_j^{-1} u_1), \dots, FE_i(E_j^{-1} u_p)) \\ &= (FE_{\sigma(i,j)} u_1, \dots, FE_{\sigma(i,j)} u_p) = 0; \end{aligned}$$

en effet, lorsque  $i \neq j$ ,  $E_{\sigma(i,j)} := E_i \circ E_j^{-1}$  n'est pas l'élément neutre.



### Exemple.

Soient  $\tilde{W} := \{w: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, w \text{ polynôme de degré } \leq 3\}$ ,

$$\alpha_1, \alpha_2: [0,1] \rightarrow [0,1], \alpha_1(x) := x, \alpha_2(x) := 1-x,$$

$$E_1, E_2: \tilde{W} \rightarrow \tilde{W}, E_i(w) := w \circ \alpha_i, i = 1, 2,$$

$$\tilde{F}: \tilde{W} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{F}w := \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix}.$$

Nous considérons le problème d'interpolation

$$\tilde{Q}w := \begin{pmatrix} \tilde{F}E_1 \\ \tilde{F}E_2 \end{pmatrix} (w) = \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \\ w(1) \\ -w'(1) \end{pmatrix}.$$

Nous choisissons la première partie d'une base d'interpolation

$$\tilde{u}_1(x) := (1-x)^3,$$

$$\tilde{u}_2(x) := (1-x)^2 x.$$

Nous obtenons

$$(Q(\tilde{u}_1), Q(\tilde{u}_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où la matrice  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$  est régulière.

Proposition.

Soient  $(S, Q(S), V(S))$  un élément fini générique solution,

$S_1, \dots, S_M$  une mosaïque de tétraèdres sur  $\Omega$ ,

$W$  l'espace de type élément fini associé.

Les inclusions

$$V(S_m) \subset H^2(S_m), \quad m = 1(1)M,$$

$$W \subset C^1(\bar{\Omega})$$

entraînent que

$$(i) \quad W \subset H^2(\Omega),$$

$$(ii) \quad \{w \in W; w|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$$(iii) \quad \{w \in W; w|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H_0^2(\Omega),$$

$\frac{\partial}{\partial \nu}$  désignant la dérivée normale au bord du polyèdre  $\Omega$ .

Démonstration.

Cette proposition est un cas particulier d'un théorème connu.

Voir par exemple CIARLET [3], Theorem 2.1.2.

1.3. Les solutions du problème élément fini.Définition.

Soit  $(S, Q(S), V(S))$  un élément fini générique, solution du problème élément fini 1.2.

Soit  $\tilde{S}$  le tétraèdre de référence de sommets

$$\tilde{A}_1 = (0, 0, 0), \quad \tilde{A}_2 = (1, 0, 0), \quad \tilde{A}_3 = (0, 1, 0), \quad \tilde{A}_4 = (0, 0, 1).$$

Soit  $L: \tilde{S} \longrightarrow S$  l'application affine définie par  $L(\tilde{A}_i) = A_i$ ,

$i = 1(1)4$ .

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

#### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

#### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

Pour  $w \in W$ , l'intégrale s'écrit

$$\int_{x_1}^{x_3} w(x) p(x) dx = \alpha_1 F_1 w + \alpha_2 F_2 w + \alpha_3 Gw.$$

Dans  $W$ , la contrainte prend la forme d'une équation linéaire

$$\begin{aligned} \alpha_3 Gw &= e_1 F_1 w + e_2 F_2 w \\ \text{où } e_1 &:= (x_3 - x_1) \frac{1}{2} p(x_1) - \alpha_1, \\ e_2 &:= (x_3 - x_1) \frac{1}{2} p(x_3) - \alpha_2. \end{aligned}$$

Pour cet exemple,  $E_1 = (e_1, e_2)$  et  $E_2 = (\alpha_3)$ .

Comme  $v_3(x) > 0$  dans  $]x_1, x_3[$ , on peut affirmer que  $\alpha_3 > 0$ .

$$\text{La solution de "Fw} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

$w \in W$  et  $w$  satisfait à la contrainte linéaire précitée"

$$\text{est } w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

$$\text{où } c_3 = \frac{1}{\alpha_3} (e_1 c_1 + e_2 c_2).$$

Remarquons enfin que, dans le cas particulier où  $p = \text{constante} > 0$ , la contrainte peut s'écrire

$$Gw = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} F_1 w + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} F_2 w,$$

ce qui signifie que  $w$  doit être un polynôme de degré  $\leq 1$ .

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & , & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$



Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

Pour  $w \in W$ , l'intégrale s'écrit

$$\int_{x_1}^{x_3} w(x) p(x) dx = \alpha_1 F_1 w + \alpha_2 F_2 w + \alpha_3 Gw.$$

Dans  $W$ , la contrainte prend la forme d'une équation linéaire

$$\begin{aligned} \alpha_3 Gw &= e_1 F_1 w + e_2 F_2 w \\ \text{où } e_1 &:= (x_3 - x_1) \frac{1}{2} p(x_1) - \alpha_1, \\ e_2 &:= (x_3 - x_1) \frac{1}{2} p(x_3) - \alpha_2. \end{aligned}$$

Pour cet exemple,  $E_1 = (e_1, e_2)$  et  $E_2 = (\alpha_3)$ .

Comme  $v_3(x) > 0$  dans  $]x_1, x_3[$ , on peut affirmer que  $\alpha_3 > 0$ .

$$\text{La solution de "Fw} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

$w \in W$  et  $w$  satisfait à la contrainte linéaire précitée"

$$\text{est } w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

$$\text{où } c_3 = \frac{1}{\alpha_3} (e_1 c_1 + e_2 c_2).$$

Remarquons enfin que, dans le cas particulier où

$p = \text{constante} > 0$ , la contrainte peut s'écrire

$$Gw = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} F_1 w + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} F_2 w,$$

ce qui signifie que  $w$  doit être un polynôme de degré  $\leq 1$ .

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

- (v) (Passage du triplet  $(A_1, A_2, A_3)$  au triangle  $T$ .) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des trois sommets de  $T$ .

Remarque.

Comme nous l'avons fait sous 1.2 pour le problème élément fini sur un tétraèdre, nous pouvons définir ici, de façon analogue, ce que sont

- un élément fini générique solution  $(T, Q(T), V(T))$ ,
- l'espace de type élément fini associé à une triangulation,
- un élément fini générique de classe  $C^k$ ,  $k = 0, 1$ ,
- l'interpolation globale associée à une triangulation.

Construction de l'élément fini.

La solution de ce problème élément fini est construite en quatre étapes.

Nous commençons par résoudre un problème d'interpolation à neuf paramètres sur un espace purement polynomial (3.4); l'élément fini générique correspondant est de classe  $C^0$ , mais n'est pas de classe  $C^1$ .

Sur le triangle de référence, nous introduisons trois paramètres supplémentaires  $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3$  et trois fonctions auxiliaires non polynomiales  $\tilde{u}_{10}, \tilde{u}_{11}$  et  $\tilde{u}_{12}$  (3.5). L'élément générique correspondant (3.6) est de classe  $C^1$ , de degré deux, à douze paramètres. Nous remplaçons les trois paramètres génériques supplémentaires  $G_1, G_2, G_3$  par des contraintes linéaires et obtenons la solution du problème sous 3.7.

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & , & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$



(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

#### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

#### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

#### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

#### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$\begin{aligned} v(A_i) &= C_{4i-3} & \partial_x v(A_i) &= C_{4i-2} \\ \partial_y v(A_i) &= C_{4i-1} & \partial_z v(A_i) &= C_{4i} , \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

#### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

#### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{4i-3}(v) &:= v(A_i), & Q_{4i-2}(v) &:= \partial_x v(A_i), \\ Q_{4i-1}(v) &:= \partial_y v(A_i), & Q_{4i}(v) &:= \partial_z v(A_i), \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

Une telle fonction permet de construire les trois fonctions d'interpolation restantes

$$\tilde{u}_{10} := \tilde{w}_1, \quad \tilde{u}_{11} := \tilde{w}_1 \circ \alpha_2^{-1}, \quad \tilde{u}_{12} := \tilde{w}_1 \circ \alpha_3^{-1}.$$

La matrice d'interpolation prend alors la forme

$$[\tilde{Q}] = \left[ \begin{array}{c|c} I_9 & 0 \\ \hline * & I_3 \end{array} \right].$$

Nous donnons deux exemples de fonctions  $\tilde{w}_1$  possédant les propriétés demandées.

Variante I. (CLOUGH, TOCHER [5])

$$\tilde{w}_1^I(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{3}(1-x-y)(2-7x-7y+5x^2+16xy+5y^2) & \text{dans } \tilde{T}_1, \\ x^2(y - \frac{1}{3}x) & \text{dans } \tilde{T}_2, \\ y^2(x - \frac{1}{3}y) & \text{dans } \tilde{T}_3. \end{cases}$$

Les triangles  $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2$  et  $\tilde{T}_3$  sont définis dans la figure 3.5

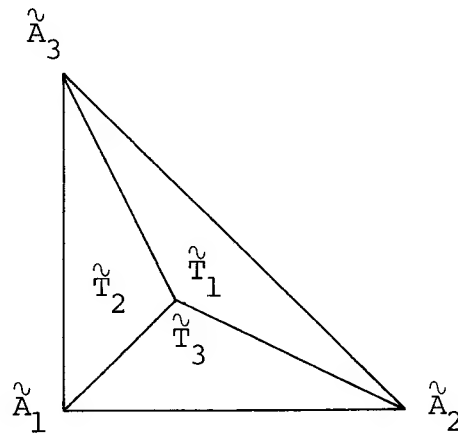


Fig. 3.5. Triangle de référence divisé en trois triangles

$\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3$  de sommet commun  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

Variante II. (BAZELEY, CHEUNG, IRONS, ZIENKIEWICZ, [1])

$$\tilde{w}_1^{II}(x, y) := \frac{2x^2 y^2 (1-x-y)}{(1-x)(1-y)}.$$

- (iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$\begin{aligned} v(A_i) &= C_{4i-3} & \partial_x v(A_i) &= C_{4i-2} \\ \partial_y v(A_i) &= C_{4i-1} & \partial_z v(A_i) &= C_{4i} , \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

#### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

#### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{4i-3}(v) &:= v(A_i), & Q_{4i-2}(v) &:= \partial_x v(A_i), \\ Q_{4i-1}(v) &:= \partial_y v(A_i), & Q_{4i}(v) &:= \partial_z v(A_i), \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

#### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

#### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

Nous devons satisfaire la condition 3.3-(iv):

- (i) La restriction de la dérivée normale  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 1$  à une variable,  $i = 1, 2, 3$ .

En tenant compte du fait que, pour  $u \in U$ , la restriction de  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 2$  à une variable, la condition à satisfaire s'écrit de façon équivalente

$$(ii) \quad \partial_{n_i} u (B_i) = \frac{1}{2} \{ \partial_{n_i} u (A_j) + \partial_{n_i} u (A_k) \}$$

c'est-à-dire

$$(iii) \quad G_i(u) = \frac{1}{2} \{ (n_i)_x F_{j1}(u) + (n_i)_y F_{j2}(u) + (n_i)_x F_{k1}(u) + (n_i)_y F_{k2}(u) \}$$

où  $(i, j, k)$  est une permutation cyclique des nombres  $(1, 2, 3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Précisons comment se calcule la solution de ce problème élément fini avec contraintes (voir 2.8).

#### Problème d'interpolation.

Soit  $c \in \mathbb{R}^9$  donné. Le problème d'interpolation 3.3-(iii) est résolu comme suit.

a) Nous calculons la valeur des trois paramètres remplacés

$$c_{10} = \frac{1}{2} \{ (n_1)_x c_5 + (n_1)_y c_6 + (n_1)_x c_8 + (n_1)_y c_9 \},$$

$$c_{11} = \frac{1}{2} \{ (n_2)_x c_8 + (n_2)_y c_9 + (n_2)_x c_2 + (n_2)_y c_3 \},$$

$$c_{12} = \frac{1}{2} \{ (n_3)_x c_2 + (n_3)_y c_3 + (n_3)_x c_5 + (n_3)_y c_6 \}.$$



(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

#### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

#### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

§ 4 ELEMENT POLYNOMIAL DE REFERENCE, DE CLASSE  $C^0$ , DE DEGRE DEUX, A 16 PARAMETRES.

Dans ce paragraphe, nous effectuons la première partie de la construction commune aux variantes II et I-C. Nous généralisons en dimension trois les résultats du paragraphe 3.4.

4.1. Notations.

Le tétraèdre de référence.

Le tétraèdre  $\tilde{S}$ , de sommets  $\tilde{A}_1 := (0,0,0)$ ,  $\tilde{A}_2 := (1,0,0)$ ,  $\tilde{A}_3 := (0,1,0)$ ,  $\tilde{A}_4 := (0,0,1)$ , est appelé tétraèdre de référence.

Soit  $\alpha_i: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$  l'application affine effectuant une permutation cyclique de la numérotation des sommets, avec

$$\alpha_i(\tilde{A}_1) = \tilde{A}_i, \quad i = 1(1)4; \quad \alpha_1 = \text{identité},$$

$$\alpha_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x-y-z \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 1-x-y-z \\ x \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 1-x-y-z \end{pmatrix}.$$

Notons  $\phi_i$  la partie linéaire de l'application affine  $\alpha_i$ ,  $i=1(1)4$ .

Désignons par  $\tilde{C}_1 := (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  le centre de gravité de la face 1 et  $\tilde{C}_i := \alpha_i(\tilde{C}_1)$ ,  $i = 1(1)4$ . A chaque sommet  $\tilde{A}_i$ , nous attachons trois vecteurs

$$\tilde{e}_{11} := (1,0,0), \quad \tilde{e}_{12} := (0,1,0), \quad \tilde{e}_{13} := (0,0,1),$$

$$\tilde{e}_{ij} := \phi_i(\tilde{e}_{1j}), \quad j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4 \quad (\text{voir fig. 4.1-1}).$$

Les milieux des arêtes sont

$$\tilde{B}_{11} := (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad \tilde{B}_{12} := (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), \quad \tilde{B}_{13} := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0),$$

$$\tilde{B}_{ij} := \alpha_i(\tilde{B}_{1j}), \quad j = 1,2,3, \quad i = 1(1)4.$$

Pour  $w \in W$ , l'intégrale s'écrit

$$\int_{x_1}^{x_3} w(x) p(x) dx = \alpha_1 F_1 w + \alpha_2 F_2 w + \alpha_3 Gw.$$

Dans  $W$ , la contrainte prend la forme d'une équation linéaire

$$\begin{aligned} \alpha_3 Gw &= e_1 F_1 w + e_2 F_2 w \\ \text{où } e_1 &:= (x_3 - x_1) \frac{1}{2} p(x_1) - \alpha_1, \\ e_2 &:= (x_3 - x_1) \frac{1}{2} p(x_3) - \alpha_2. \end{aligned}$$

Pour cet exemple,  $E_1 = (e_1, e_2)$  et  $E_2 = (\alpha_3)$ .

Comme  $v_3(x) > 0$  dans  $]x_1, x_3[$ , on peut affirmer que  $\alpha_3 > 0$ .

$$\text{La solution de "Fw} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

$w \in W$  et  $w$  satisfait à la contrainte linéaire précitée"

$$\text{est } w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

$$\text{où } c_3 = \frac{1}{\alpha_3} (e_1 c_1 + e_2 c_2).$$

Remarquons enfin que, dans le cas particulier où

$p = \text{constante} > 0$ , la contrainte peut s'écrire

$$Gw = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} F_1 w + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} F_2 w,$$

ce qui signifie que  $w$  doit être un polynôme de degré  $\leq 1$ .

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

Nous devons satisfaire la condition 3.3-(iv):

- (i) La restriction de la dérivée normale  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 1$  à une variable,  $i = 1, 2, 3$ .

En tenant compte du fait que, pour  $u \in U$ , la restriction de  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 2$  à une variable, la condition à satisfaire s'écrit de façon équivalente

$$(ii) \quad \partial_{n_i} u (B_i) = \frac{1}{2} \{ \partial_{n_i} u (A_j) + \partial_{n_i} u (A_k) \}$$

c'est-à-dire

$$(iii) \quad G_i(u) = \frac{1}{2} \{ (n_i)_x F_{j1}(u) + (n_i)_y F_{j2}(u) \\ + (n_i)_x F_{k1}(u) + (n_i)_y F_{k2}(u) \}$$

où  $(i, j, k)$  est une permutation cyclique des nombres  $(1, 2, 3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Précisons comment se calcule la solution de ce problème élément fini avec contraintes (voir 2.8).

#### Problème d'interpolation.

Soit  $c \in \mathbb{R}^9$  donné. Le problème d'interpolation 3.3-(iii) est résolu comme suit.

a) Nous calculons la valeur des trois paramètres remplacés

$$c_{10} = \frac{1}{2} \{ (n_1)_x c_5 + (n_1)_y c_6 + (n_1)_x c_8 + (n_1)_y c_9 \},$$

$$c_{11} = \frac{1}{2} \{ (n_2)_x c_8 + (n_2)_y c_9 + (n_2)_x c_2 + (n_2)_y c_3 \},$$

$$c_{12} = \frac{1}{2} \{ (n_3)_x c_2 + (n_3)_y c_3 + (n_3)_x c_5 + (n_3)_y c_6 \}.$$

Pour  $w \in W$ , l'intégrale s'écrit

$$\int_{x_1}^{x_3} w(x) p(x) dx = \alpha_1 F_1 w + \alpha_2 F_2 w + \alpha_3 Gw.$$

Dans  $W$ , la contrainte prend la forme d'une équation linéaire

$$\begin{aligned} \alpha_3 Gw &= e_1 F_1 w + e_2 F_2 w \\ \text{où } e_1 &:= (x_3 - x_1) \frac{1}{2} p(x_1) - \alpha_1, \\ e_2 &:= (x_3 - x_1) \frac{1}{2} p(x_3) - \alpha_2. \end{aligned}$$

Pour cet exemple,  $E_1 = (e_1, e_2)$  et  $E_2 = (\alpha_3)$ .

Comme  $v_3(x) > 0$  dans  $]x_1, x_3[$ , on peut affirmer que  $\alpha_3 > 0$ .

$$\text{La solution de "Fw} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

$w \in W$  et  $w$  satisfait à la contrainte linéaire précitée"

$$\text{est } w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

$$\text{où } c_3 = \frac{1}{\alpha_3} (e_1 c_1 + e_2 c_2).$$

Remarquons enfin que, dans le cas particulier où

$p = \text{constante} > 0$ , la contrainte peut s'écrire

$$Gw = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} F_1 w + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} F_2 w,$$

ce qui signifie que  $w$  doit être un polynôme de degré  $\leq 1$ .

La propriété (iii) exprime que  $(S, Q, V)$  est un élément fini.

En particulier,  $\dim V = 16$ .

Remarque 3.

La propriété (ii) s'énonce aussi "l'élément fini  $(S, Q, V)$  est de degré deux".

Définition 1.

Soit  $\mathcal{Y}$  l'ensemble des tétraèdres non dégénérés de  $\mathbb{R}^3$ . Une solution du problème élément fini ci-dessus est une famille d'éléments finis

$$\{(S, Q(S), V(S)); S \in \mathcal{Y}\}.$$

Une telle famille sera caractérisée par un élément fini générique, c'est-à-dire un élément  $(S, Q(S), V(S))$  où  $S \in \mathcal{Y}$  est un paramètre libre.

Définition 2.

Soient  $(S, Q(S), V(S))$  un élément fini générique solution,

$\Omega$  un polyèdre ouvert borné dans  $\mathbb{R}^3$ ,

$S_1, \dots, S_M$  une mosaïque de tétraèdres sur  $\Omega$ ,

$\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1, \dots, S_M$ .

A  $4K$  nombres réels  $c_{0k}, c_{1k}, c_{2k}, c_{3k}$ ,  $k = 1(1)K$ , donnés, on fait correspondre une fonction  $w: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$w|_{S_m} \in V(S_m) \text{ pour } m = 1(1)M \text{ et}$$

$$w(A_k) = c_{0k} \quad \partial_x w(A_k) = c_{1k}$$

$$\partial_y w(A_k) = c_{2k} \quad \partial_z w(A_k) = c_{3k}, \quad k = 1(1)K.$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_i(v) = & \left\{ \frac{1}{3} \tilde{F}_{j0} + \frac{1}{18} (\tilde{F}_{j1} + \tilde{F}_{j2}) \right. \\ & + \frac{1}{3} \tilde{F}_{k0} + \frac{1}{18} (\tilde{F}_{k1} + \tilde{F}_{k3}) \\ & \left. + \frac{1}{3} \tilde{F}_{\ell 0} + \frac{1}{18} (\tilde{F}_{\ell 2} + \tilde{F}_{\ell 3}) \right\} (v) \end{aligned}$$

où  $(i, j, k, \ell)$  est une permutation cyclique de  $(1, 2, 3, 4)$ ,  $i = 1(1)4$ .

D'après 2.8, ce nouveau problème d'interpolation est unisolvant.

Sa base de Lagrange est

$$\tilde{p}_{10}(x, y, z) = (1-x-y-z) \{1+x+y+z-2(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)\},$$

$$\tilde{p}_{11}(x, y, z) = x(1-x-y-z) \left\{1-x-\frac{1}{2}(y+z)\right\},$$

$$\tilde{p}_{12}(x, y, z) = \tilde{p}_{11}(y, z, x)$$

$$\tilde{p}_{13}(x, y, z) = \tilde{p}_{11}(z, x, y)$$

$$\tilde{p}_{ij} := \tilde{p}_{1j} \circ \alpha_i^{-1}, \quad j = 0(1)3, \quad i = 1(1)4.$$

D'après 3.4, les contraintes linéaires sont satisfaites pour tous les polynômes de degré  $\leq 2$ ; ainsi, l'espace d'interpolation de ce problème contient tous les polynômes de degré  $\leq 2$ .

L'élément générique correspondant est de classe  $C^0$ , mais n'est pas de classe  $C^1$ .



## § 5 VARIANTE II, CONSTRUCTION.

Nous poursuivons la construction annoncée au paragraphe 1 et commencée au paragraphe 4.

### 5.1. Notations.

Afin de construire des fonctions auxiliaires permettant de corriger les dérivées normales des polynômes de 4.3 sur les faces du tétraèdre générique, nous introduisons des paramètres auxiliaires.

#### Les paramètres de référence.

Aux 16 paramètres introduits sous 4.1, nous ajoutons les 12 paramètres auxiliaires

$$\tilde{G}_{ij}(w) := \partial_{\tilde{n}_{ij}} w(\tilde{B}_{ij}), \quad j = 1, 2, 3, \quad i = 1(1)4.$$

Ces 28 paramètres sont ordonnés comme suit

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} F_{10}^2 \\ F_{11}^2 \\ \dots \\ F_{42}^2 \\ F_{43}^2 \\ G_{11}^2 \\ G_{12}^2 \\ \dots \\ G_{42}^2 \\ G_{43}^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q}: C^1(\tilde{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{28}.$$

Comme dans le lemme de 4.1, on montre que

$$\tilde{G}_{ij} = \tilde{G}_{1j} \circ E_i, \quad j = 1, 2, 3, \quad i = 1(1)4.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

#### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

#### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

les blocs non diagonaux  $p \times p$  de cette matrice sont

$$\begin{aligned} & (FE_i(E_j^{-1} u_1), \dots, FE_i(E_j^{-1} u_p)) \\ &= (FE_{\sigma(i,j)} u_1, \dots, FE_{\sigma(i,j)} u_p) = 0; \end{aligned}$$

en effet, lorsque  $i \neq j$ ,  $E_{\sigma(i,j)} := E_i \circ E_j^{-1}$  n'est pas l'élément neutre.



### Exemple.

Soient  $\tilde{W} := \{w: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, w \text{ polynôme de degré } \leq 3\}$ ,

$$\alpha_1, \alpha_2: [0,1] \rightarrow [0,1], \alpha_1(x) := x, \alpha_2(x) := 1-x,$$

$$E_1, E_2: \tilde{W} \rightarrow \tilde{W}, E_i(w) := w \circ \alpha_i, i = 1, 2,$$

$$\tilde{F}: \tilde{W} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{F}w := \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix}.$$

Nous considérons le problème d'interpolation

$$\tilde{Q}w := \begin{pmatrix} \tilde{F}E_1 \\ \tilde{F}E_2 \end{pmatrix} (w) = \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \\ w(1) \\ -w'(1) \end{pmatrix}.$$

Nous choisissons la première partie d'une base d'interpolation

$$\tilde{u}_1(x) := (1-x)^3,$$

$$\tilde{u}_2(x) := (1-x)^2 x.$$

Nous obtenons

$$(Q(\tilde{u}_1), Q(\tilde{u}_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où la matrice  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$  est régulière.

Nous avons

$$\partial_{\lambda} b(\lambda; x, y, z) \Big|_{\text{face } 1} = -xyz c(\lambda; x, y, z).$$

Par suite, la deuxième partie de la condition (iv) est satisfaite de la façon suivante

Formule 5.2-1.

$$\partial_{\lambda} \tilde{w}_{11}(\lambda; x, y, z) \Big|_{\text{face } 1} = \lambda_x^2 yz.$$

La condition (iii) prend la forme

Formule 5.2-2.

$$\partial_t \tilde{w}_{11}(\lambda; x, y, z) \Big|_{\text{face } 2} = t_x^2 yz.$$

Enfin, nous pouvons mettre  $\tilde{w}_{11}$  sous la forme suivante.

Formule 5.2-3.

$$\tilde{w}_{11}(\lambda; x, y, z) = r_0(x, y, z) + \frac{\lambda_x r_1(x, y, z) + \lambda_y r_2(x, y, z) + \lambda_z r_3(x, y, z)}{\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z}$$

$$\text{où } r_0(x, y, z) := \frac{2xy^2z^2}{(x+y)(x+z)},$$

$$r(x, y, z) := \frac{2x^2y^2z^2(1-x-y-z)}{(1-x-y)(1-x-z)(1-y-z)(1-y)(1-z)},$$

$$r_1(x, y, z) := r(x, y, z) \left\{ -1 - \frac{yz(1+x)}{(1-y)(1-z)} \right\},$$

$$r_2(x, y, z) := r(x, y, z) \frac{z(2x+y)}{1-z},$$

$$r_3(x, y, z) := r(x, y, z) \frac{y(2x+z)}{1-y}.$$

Remarque.

$\tilde{w}_{11}(\lambda; x, y, z)$  est homogène en  $\lambda$ .



Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$

Pour  $w \in W$ , l'intégrale s'écrit

$$\int_{x_1}^{x_3} w(x) p(x) dx = \alpha_1 F_1 w + \alpha_2 F_2 w + \alpha_3 Gw.$$

Dans  $W$ , la contrainte prend la forme d'une équation linéaire

$$\begin{aligned} \alpha_3 Gw &= e_1 F_1 w + e_2 F_2 w \\ \text{où } e_1 &:= (x_3 - x_1) \frac{1}{2} p(x_1) - \alpha_1, \\ e_2 &:= (x_3 - x_1) \frac{1}{2} p(x_3) - \alpha_2. \end{aligned}$$

Pour cet exemple,  $E_1 = (e_1, e_2)$  et  $E_2 = (\alpha_3)$ .

Comme  $v_3(x) > 0$  dans  $]x_1, x_3[$ , on peut affirmer que  $\alpha_3 > 0$ .

$$\text{La solution de "Fw} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

$w \in W$  et  $w$  satisfait à la contrainte linéaire précitée"

$$\text{est } w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

$$\text{où } c_3 = \frac{1}{\alpha_3} (e_1 c_1 + e_2 c_2).$$

Remarquons enfin que, dans le cas particulier où

$p = \text{constante} > 0$ , la contrainte peut s'écrire

$$Gw = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} F_1 w + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} F_2 w,$$

ce qui signifie que  $w$  doit être un polynôme de degré  $\leq 1$ .

Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$\begin{aligned} v(A_i) &= C_{4i-3} & \partial_x v(A_i) &= C_{4i-2} \\ \partial_y v(A_i) &= C_{4i-1} & \partial_z v(A_i) &= C_{4i} , \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{4i-3}(v) &:= v(A_i), & Q_{4i-2}(v) &:= \partial_x v(A_i), \\ Q_{4i-1}(v) &:= \partial_y v(A_i), & Q_{4i}(v) &:= \partial_z v(A_i), \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

#### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

#### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$

Pour  $w \in W$ , l'intégrale s'écrit

$$\int_{x_1}^{x_3} w(x) p(x) dx = \alpha_1 F_1 w + \alpha_2 F_2 w + \alpha_3 Gw.$$

Dans  $W$ , la contrainte prend la forme d'une équation linéaire

$$\begin{aligned} \alpha_3 Gw &= e_1 F_1 w + e_2 F_2 w \\ \text{où } e_1 &:= (x_3 - x_1) \frac{1}{2} p(x_1) - \alpha_1, \\ e_2 &:= (x_3 - x_1) \frac{1}{2} p(x_3) - \alpha_2. \end{aligned}$$

Pour cet exemple,  $E_1 = (e_1, e_2)$  et  $E_2 = (\alpha_3)$ .

Comme  $v_3(x) > 0$  dans  $]x_1, x_3[$ , on peut affirmer que  $\alpha_3 > 0$ .

$$\text{La solution de "Fw} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

$w \in W$  et  $w$  satisfait à la contrainte linéaire précitée"

$$\text{est } w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

$$\text{où } c_3 = \frac{1}{\alpha_3} (e_1 c_1 + e_2 c_2).$$

Remarquons enfin que, dans le cas particulier où

$p = \text{constante} > 0$ , la contrainte peut s'écrire

$$Gw = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} F_1 w + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} F_2 w,$$

ce qui signifie que  $w$  doit être un polynôme de degré  $\leq 1$ .



Les paramètres génériques.

Définissons  $C_{ij} := L(\tilde{C}_{ij})$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $i = 1(1)4$ . Aux 16 paramètres génériques de 4.1, nous ajoutons les 28 paramètres auxiliaires suivants

$$G_{ij}(w) := \partial_{n_{ij}} w(B_{ij}), \quad j = 1, 2, 3, \quad i = 1(1)4,$$

$$H_i(w) := \partial_{m_i} w(C_i), \quad i = 1(1)4,$$

$$H_{ij}(w) := \partial_{m_i} w(C_{ij}), \quad j = 1, 2, 3, \quad i = 1(1)4.$$

Ces 44 paramètres sont ordonnés de la façon suivante

$$Q := \begin{pmatrix} F_{10} \\ F_{11} \\ \dots \\ F_{42} \\ F_{43} \\ G_{11} \\ G_{12} \\ \dots \\ G_{43} \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_{11} \\ H_{12} \\ \dots \\ H_{42} \\ H_{43} \end{pmatrix}, \quad Q: C^1(S) \longrightarrow \mathbb{R}^{44}.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$\begin{aligned} v(A_i) &= C_{4i-3} & \partial_x v(A_i) &= C_{4i-2} \\ \partial_y v(A_i) &= C_{4i-1} & \partial_z v(A_i) &= C_{4i} , \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{4i-3}(v) &:= v(A_i), & Q_{4i-2}(v) &:= \partial_x v(A_i), \\ Q_{4i-1}(v) &:= \partial_y v(A_i), & Q_{4i}(v) &:= \partial_z v(A_i), \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

Nous avons constaté qu'il n'est pas possible de résoudre le problème élément fini 6.2 uniquement avec de tels polynômes par morceaux. Ce résultat négatif fera l'objet de 6.2-5. Nous démontrerons aussi que  $\tilde{r}_{10}$  ne peut pas être un polynôme de degré  $\leq 3$  par morceaux.

### Construction de $\tilde{r}_{10}$ .

Nous prescrivons que les restrictions de  $\tilde{r}_{10}$  à  $\tilde{S}_1$ ,  $\tilde{S}_2$  et  $\tilde{S}_3$  (voir fig. 6.2-2) soient des fonctions rationnelles possédant les symétries suivantes:

$$\tilde{r}_{10}|_{\tilde{S}_2}(x,y,z) = \tilde{r}_{10}|_{\tilde{S}_1}(y,x,z),$$

$$\tilde{r}_{10}|_{\tilde{S}_3}(x,y,z) = \tilde{r}_{10}|_{\tilde{S}_1}(z,y,x).$$

Pour obtenir la classe  $C^1(\tilde{S})$ , nous exigeons que

$$\tilde{r}_{10}|_{\tilde{S}_1}(x,y,z) = \tilde{r}_{10}|_{\tilde{S}_1}(x,z,y)$$

$$(\partial_y - \partial_x)(\tilde{r}_{10}|_{\tilde{S}_1})|_{y-x=0} = 0.$$

Il suffit de construire  $\tilde{r}_{10}|_{\tilde{S}_1}$ .

Pour le morceau  $\tilde{S}_1$ , nous partons de la fonction

$$a(x,y,z) := 3x^2(1-x-y-z).$$

### Première correction.

A la fonction  $a$ , nous ajoutons

$$b(x,y,z) := 2 \frac{x^2(1-x-y-z)^2(y+z-2x)}{(1-3x)(y+z-x)}$$

de telle façon que

$$(\partial_y + \partial_z - 2\partial_x)(a+b)|_{y+z-2x=0} = 0.$$

Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$

Définition 8.

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,

$T$  un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m$  avec

$$T \cap \Omega \neq \emptyset \text{ et } 1 \leq m < n,$$

$v: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Nous dirons que " $v|_{T \cap \Omega}$ , considéré comme une fonction de  $m$  variables, est un polynôme de degré  $\leq k$ " ou bien que " $v|_{T \cap \Omega}$  est un polynôme de degré  $\leq k$  à  $m$  variables" si et seulement si, pour une paramétrisation affine  $p: \mathbb{R}^m \longrightarrow T$ , la fonction  $v \circ p$  définie sur  $p^{-1}(T \cap \Omega)$  est un polynôme de degré  $\leq k$ .

Notation.

Soient  $\Omega$  ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $A \in \bar{\Omega}$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Nous utiliserons la notation suivante

$$\partial_{\xi} v(A) := Dv(A)(\xi)$$

c'est-à-dire

$$\partial_{\xi} v(A) = \xi_1 \partial_{x_1} v(A) + \dots + \xi_n \partial_{x_n} v(A).$$

1.2. Enoncé du problème élément fini.

Soit  $S$  un tétraèdre fermé, non dégénéré, de sommets  $A_1, A_2, A_3, A_4$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous cherchons un espace linéaire  $V = V(S) \subset C^1(\bar{S})$  possédant les propriétés suivantes.

- (i) Les fonctions de  $V$  sont de classe  $C^2$  presque partout; leurs dérivées partielles d'ordre deux sont bornées.
- (ii)  $V$  contient tous les polynômes de degré  $\leq 2$  à trois variables.



$$\begin{aligned}\tilde{r}_{13}|\tilde{S}_2(x,y,z) &= \tilde{r}_{13}|\tilde{S}_1(y,x,z), \\ \tilde{r}_{13}|\tilde{S}_3 &= 0.\end{aligned}$$

Pour obtenir la classe  $C^1(\tilde{S})$ , nous exigeons que

$$\begin{aligned}(\partial_y - \partial_x)(\tilde{r}_{13}|\tilde{S}_1) \Big|_{y-x=0} &= 0, \\ (\tilde{r}_{13}|\tilde{S}_1) \Big|_{z-x=0} &= 0, \\ (\partial_z - \partial_x)(\tilde{r}_{13}|\tilde{S}_1) \Big|_{z-x=0} &= 0.\end{aligned}$$

Il suffit de construire  $\tilde{r}_{13}|\tilde{S}_1$ .

Pour le morceau  $\tilde{S}_1$ , nous partons de la fonction

$$a(x,y,z) := \frac{4x^2(z-x)^2(1-x-y-z)}{(1-y-z)(1-2x-y)}$$

qui vérifie

$$\partial_{m_1}^{\tilde{S}} a(x,y,z) \Big|_{1-x-y-z=0} = 12x(z-x).$$

A la fonction  $a$ , nous ajoutons  $b$  de telle façon que

$$\begin{aligned}(\partial_y - \partial_x)(a+b) \Big|_{y-x=0} &= 0, \\ (\tilde{r}_{13}|\tilde{S}_1) &:= a + b.\end{aligned}$$

Nous calculons

$$\begin{aligned}(\partial_y - \partial_x) a(x,y,z) \Big|_{y-x=0} \\ = 4x(z-x)(1-x-y-z) \beta(x,y,z), \text{ où}\end{aligned}$$

$$\beta(x,y,z) := \frac{1}{(1-x-z)(1-3x)} \left\{ 4x-2z+x(z-x) \left( \frac{1}{1-x-z} - \frac{1}{1-3x} \right) \right\}.$$

Nous posons

$$b(x,y,z) := - \frac{2x^2(z-x)^2(1-x-y-z)^2(y-x)}{y(y+z-2x)(1-2x-z)} \beta(x,y,z).$$

Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$

Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$

Proposition.

Soit  $f: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction satisfaisant

- a)  $f$  est de classe  $C^1(\tilde{S})$ ;
- b)  $f \in \tilde{\Pi}$ ;
- c)  $f$  s'annule sur le bord de  $\tilde{S}$ .

Alors, le gradient de  $f$  est nul sur le bord de  $\tilde{S}$ .

Démonstration.

Par les hypothèses b et c,  $f$  est de la forme

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (1-x-y-z) h_1(x, y, z) & \text{sur } \tilde{C} \tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \tilde{A}_4, \\ x h_2(x, y, z) & \text{sur } \tilde{C} \tilde{A}_3 \tilde{A}_4 \tilde{A}_1, \\ y h_3(x, y, z) & \text{sur } \tilde{C} \tilde{A}_4 \tilde{A}_1 \tilde{A}_2, \\ z h_4(x, y, z) & \text{sur } \tilde{C} \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3, \end{cases}$$

où chaque  $h_i$  est un polynôme de degré  $\leq 2$  sur chacun des trois morceaux

$$\tilde{C} \tilde{C}_i \tilde{A}_k \tilde{A}_\ell, \quad \tilde{C} \tilde{C}_i \tilde{A}_\ell \tilde{A}_j, \quad \tilde{C} \tilde{C}_i \tilde{A}_j \tilde{A}_k,$$

( $i, j, k, \ell$ ) désignant une permutation cyclique des nombres (1, 2, 3, 4).

Au moyen d'une transformation affine, nous utilisons le lemme précédent sur chaque tétraèdre  $\tilde{C} \tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \tilde{A}_4$ ,  $\tilde{C} \tilde{A}_3 \tilde{A}_4 \tilde{A}_1$ ,  $\tilde{C} \tilde{A}_4 \tilde{A}_1 \tilde{A}_2$ ,  $\tilde{C} \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3$ ; nous concluons que  $h_i$  est un polynôme de degré  $\leq 2$ ,  $i = 1(1)4$ .

Par suite, la dérivée normale de  $f$ , restreinte à une face et considérée comme une fonction de deux variables, est un polynôme de degré  $\leq 2$ . Par les hypothèses a et c, cette dérivée normale s'annule le long des trois arêtes de la face. Ainsi, la dérivée normale, restreinte à la face, est nulle. En tenant compte de l'hypothèse c, le gradient de  $f$  est nul sur le bord de  $\tilde{S}$ .



(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

### 6.3. Élément tétraédrique générique, élargi à 44 paramètres.

Pour le problème d'interpolation

$$Q: C^1(S) \longrightarrow \mathbb{R}^{44} \quad (\text{voir 6.1}),$$

nous choisissons la base d'interpolation

$$u_i := \tilde{u}_i \circ L^{-1}, \quad i = 1(1)44,$$

où les  $\tilde{u}_i$  sont les fonctions d'interpolation de l'élément de référence. Notons  $U$  l'espace vectoriel engendré par ces 44 fonctions.

#### Théorème.

Le problème d'interpolation élargi  $Q: U \longrightarrow \mathbb{R}^{44}$  est  $U$ -unisolvant.

#### Démonstration.

Par rapport à la base d'interpolation  $\{u_i; i = 1(1)44\}$ , la matrice d'interpolation de  $Q$  a la forme suivante

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & D_1^{-1} & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & D_2^{-1} & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & D_3^{-1} & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & D_4^{-1} \\ Q_1 & & & & & & & D_5^{-1} \\ Q_2 & & & & & & & D_6^{-1} \\ Q_3 & & & & & & & D_7^{-1} \end{pmatrix}$$

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

Définition 8.

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,

$T$  un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m$  avec

$$T \cap \Omega \neq \emptyset \text{ et } 1 \leq m < n,$$

$v: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Nous dirons que " $v|_{T \cap \Omega}$ , considéré comme une fonction de  $m$  variables, est un polynôme de degré  $\leq k$ " ou bien que " $v|_{T \cap \Omega}$  est un polynôme de degré  $\leq k$  à  $m$  variables" si et seulement si, pour une paramétrisation affine  $p: \mathbb{R}^m \longrightarrow T$ , la fonction  $v \circ p$  définie sur  $p^{-1}(T \cap \Omega)$  est un polynôme de degré  $\leq k$ .

Notation.

Soient  $\Omega$  ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $A \in \bar{\Omega}$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Nous utiliserons la notation suivante

$$\partial_{\xi} v(A) := Dv(A)(\xi)$$

c'est-à-dire

$$\partial_{\xi} v(A) = \xi_1 \partial_{x_1} v(A) + \dots + \xi_n \partial_{x_n} v(A).$$

1.2. Enoncé du problème élément fini.

Soit  $S$  un tétraèdre fermé, non dégénéré, de sommets  $A_1, A_2, A_3, A_4$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous cherchons un espace linéaire  $V = V(S) \subset C^1(\bar{S})$  possédant les propriétés suivantes.

- (i) Les fonctions de  $V$  sont de classe  $C^2$  presque partout; leurs dérivées partielles d'ordre deux sont bornées.
- (ii)  $V$  contient tous les polynômes de degré  $\leq 2$  à trois variables.



Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$\begin{aligned} v(A_i) &= C_{4i-3} & \partial_x v(A_i) &= C_{4i-2} \\ \partial_y v(A_i) &= C_{4i-1} & \partial_z v(A_i) &= C_{4i} , \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{4i-3}(v) &:= v(A_i), & Q_{4i-2}(v) &:= \partial_x v(A_i), \\ Q_{4i-1}(v) &:= \partial_y v(A_i), & Q_{4i}(v) &:= \partial_z v(A_i), \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$

Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$

$$\begin{aligned}
& (\partial_y - \partial_x) \tilde{w}_{43}^{II}(\nu_4; 3x, -x+y, -x+z) \Big|_{y-x=0} \\
& = \{ \partial_{(2,0,-3)} \tilde{w}_{11}^{II}(\mu_{4z}, \mu_{4x}, \mu_{4y}; \dots) \} (y-x, 1-x-y-z, 3x) \Big|_{y-x=0} \\
& = 12x(1-x-y-z).
\end{aligned}$$

C'est pourquoi nous posons

$$\tilde{r}_{10} | \tilde{S}_1 := a + \frac{1}{3} \{ \tilde{w}_{31}^{II}(\nu_3; \dots) + \tilde{w}_{43}^{II}(\nu_4; \dots) \} \circ L_1^{-1},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_{10} | \tilde{S}_1(x, y, z) &= 3x^2(1-x-y-z) \\
&+ \frac{1}{3} \tilde{w}_{11}^{II}(1, 0, -3; z-x, 1-x-y-z, 3x) \\
&+ \frac{1}{3} \tilde{w}_{11}^{II}(1, 0, -3; y-x, 1-x-y-z, 3x)
\end{aligned}$$

Construction de  $\tilde{r}_{13} | \tilde{S}_1$  (voir 6.2-4).

Nous posons

$$\tilde{r}_{13} | \tilde{S}_1 := \tilde{w}_{32}^{II}(\nu_3; L_1^{-1}(\dots)),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_{13} | \tilde{S}_1(x, y, z) &= \tilde{w}_{32}^{II}(-3, 2, 1; 3x, -x+y, -x+z) \\
&= \tilde{w}_{12}^{II}(1, 0, -3; z-x, 1-x-y-z, 3x) \\
&= \tilde{w}_{11}^{II}(0, -3, 1; 1-x-y-z, 3x, z-x) \\
&= 9x^2(z-x)^2(1-x-y-z) \left\{ \frac{2}{(1+2x-y-z)(1-2x-y)} \right. \\
&+ \frac{3(1-x-y-z)(y-x)}{(y+z-2x)(2x+y)(1-2x-z)(1-3x)(1+x-z)} \\
&\cdot \left( \frac{(z-x)(2+x-2y-2z)}{1+x-z} - \frac{x(2-3x-2y-z)}{1-3x} \right) \Big\}.
\end{aligned}$$

désignons par  $V_n$  l'espace des fonctions de type élément fini  $v_n$  associées à la  $n$ -ème mosaïque et satisfaisant

$$v_n|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_n}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Le problème discrétisé selon la méthode de RAYLEIGH - RITZ-GALERKIN s'énonce

$$\text{trouver } u_n \in V_n \text{ tel que } \forall v_n \in V_n$$

$$a(u_n, v_n) = b(v_n).$$

A partir du théorème 9.5, on démontre le théorème suivant par des arguments classiques.

Théorème.

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{2,\Omega} = 0 ;$$

(ii) il existe une constante  $c$  ne dépendant que de  $\Omega$  et de la suite des mosaïques telle que si  $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\|u - u_n\|_{2,\Omega} \leq c h_n |u|_{3,\Omega}.$$

Remarque.

Dans [4], CIARLET et RAVIART ont décrit une méthode non conforme pour résoudre l'équation biharmonique à  $n$  variables. Pour obtenir une majoration analogue à (ii) ci-dessus, ils ont dû supposer  $u \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ .



(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$\begin{aligned} v(A_i) &= C_{4i-3} & \partial_x v(A_i) &= C_{4i-2} \\ \partial_y v(A_i) &= C_{4i-1} & \partial_z v(A_i) &= C_{4i} , \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

#### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

#### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{4i-3}(v) &:= v(A_i), & Q_{4i-2}(v) &:= \partial_x v(A_i), \\ Q_{4i-1}(v) &:= \partial_y v(A_i), & Q_{4i}(v) &:= \partial_z v(A_i), \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$

Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

#### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

#### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

Remarque.

Une partie des communications entre les sous-programmes se fait au moyen d'un bloc commun nommé TETRAS. Ce bloc commun ne dépend que du tétraèdre considéré. Il est initialisé par les sous-routines ELEMØ, ELEM1, ELEM2 et ELEM3. Il est utilisé par HERM et DHERM.

7.3. Le programme FORTRAN.

Le programme suivant comprend 783 cartes, imprimées à raison de 60 lignes par page.



```

C*****
C*****
C*****
C****
C****
C****      E L E M E N T      F I N I      T E T R A E D R I Q U E      ****
C****
C****      D E C L A S S E C 1,      D E D E G R E D E U X,      A S E I Z E P A R A M E T R E S.      ****
C****
C****
C****      V A R I A N T E I I.                                     M A R C E L D E L E Z E      ****
C****                                                    I N S T. D E M A T H.      ****
C****                                                    U N I V E R S I T E      ****
C****                                                    1 7 0 0 F R I B O U R G      ****
C****      F E V R I E R 1 9 7 8.                                     S W I T Z E R L A N D      ****
C****
C*****
C*****
C-----
C
C
C

```

Les programmes ont été numérisés sous la forme de fichiers textes :

<http://www.deleze.name/~marcel//maths/FORTTRAN/index.html>

```

      RETURN
      END
C-----
C
      SUBROUTINE REFCT (WT,XT,YT,ZT, R0,R1,R2,R3)
C
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE PSEUDO-REFERENCE.
C**** VALEURS DES FONCTIONS RATIONNELLES R0, R1, R2 ET R3
C**** AU POINT (XT,YT,ZT). WT=1.-XT-YT-ZT.
C**** NOUS SUPPOSONS QUE LE POINT (XT,YT,ZT) NE SOIT PAS SITUE SUR
C**** UNE ARETE DU TETRAEDRE.
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      R0=2.*X*Y*Y*Z*Z/((X+Y)*(X+Z))
      R =2.*X*X*Y*Y*Z*Z+W/((W+X)*(W+Y)*(W+Z)*(1.-Y)*(1.-Z))
      R1=R*(-1. - Y*Z*(1.+X)/((1.-Y)*(1.-Z)))
      R2=R*Z*(2.*X+Y)/(1.-Z)
      R3=R*Y*(2.*X+Z)/(1.-Y)
      RETURN
      END
C-----
C
      FUNCTION WT11 (MUX,MUY,MUZ, WT,XT,YT,ZT)

```

```

C
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE PSEUDO-REFERENCE.
C**** VALEUR DE LA FONCTION RATIONNELLE WT(1,1,MU)
C**** AU POINT (XT,YT,ZT) DU TETRAEDRE DE REFERENCE, WT=1.-XT-YT-ZT.
C**** LA DIRECTION NORMALE DEPLACEE (MUX, MUY, MUZ) DEPEND DU TETRAEDRE
C**** GENERIQUE.      NOUS SUPPOSONS QUE      MUX+MUY+MUZ = 1.
      REAL MUX,MUY,MUZ
      DATA EPS /0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      IF (X.GT.EPS .AND. Y.GT.EPS .AND. Z.GT.EPS) GO TO 30
C**** DANS LES FACES 2, 3 ET 4, ON A
      WT11=0.0
      RETURN
30 CONTINUE
      IF (W.GT.EPS) GO TO 40
C**** A L'INTERIEUR DE LA FACE 1, ON A
      WT11=2.*X*Y*Y*Z*Z/((X+Y)*(X+Z))
      RETURN
40 CONTINUE
C**** A L'INTERIEUR DU TETRAEDRE, ON A
      CALL REFCT(W,X,Y,Z,R0,R1,R2,R3)
      WT11=R0 + MUX*R1 + MUY*R2 + MUZ*R3
      RETURN
      END
C-----
C
      SUBROUTINE UT28 (NFCT, XT,YT,ZT, UT)
C
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE PSEUDO-REFERENCE.
C**** VALEUR DE UT(1), ..., UT(NFCT) AU POINT (XT,YT,ZT) DU TETRAEDRE DE
C**** REFERENCE.
C**** NFCT PEUT PRENDRE LES VALEURS 16 OU 28.
C**** LES DIRECTIONS NORMALES DEPLACEES MUX(I), MUY(I), MUZ(I), I=1(1)4,
C**** DEPENDENT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
1          NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
2          D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION UT(28)
      NFCS=NFCT
      XL=XT
      YL=YT
      ZL=ZT
      WL=1.-XL-YL-ZL
      DO 90 I=1,4
C****      BLOC 1.  FONCTIONS NUMEROS 1 A 16.
          IND=4*I-3
          UT(IND )=PT1(0,WL,XL,YL,ZL)
          UT(IND+1)=PT1(1,WL,XL,YL,ZL)
          UT(IND+2)=PT1(1,WL,YL,ZL,XL)
          UT(IND+3)=PT1(1,WL,ZL,XL,YL)
          IF (NFCS.LE.16) GO TO 80
C****      BLOC 2.  FONCTIONS NUMEROS 17 A 28.
          IND=3*I+14
          UT(IND )=WT11(MUX(I),MUY(I),MUZ(I),WL,XL,YL,ZL)

```

```

      UT(IND+1)=WT11(MUY(I),MUZ(I),MUX(I),WL,YL,ZL,XL)
      UT(IND+2)=WT11(MUZ(I),MUX(I),MUY(I),WL,ZL,XL,YL)
80    CH=WL
      WL=XL
      XL=YL
      YL=ZL
      ZL=CH
90    CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      FUNCTION DPT1 (J, TX,TY,TZ, WT,XT,YT,ZT)
C
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE PSEUDO-REFERENCE.
C**** DERIVEE DU POLYNOME DE DEGRE TROIS PT(1,J) DANS LA DIRECTION
C**** (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT).
C**** J PEUT PRENDRE LES VALEURS 0 OU 1. WT=1,-XT-YT-ZT.
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      T0=-T1-T2-T3
      IF (J) 10,10,11
10    P=2,-W      =2.*(X*X+Y*Y+Z*Z+X*Y+Y*Z+Z*X)
      DP =-T0 = 2.*( T1*(2.*X+Y+Z)+T2*(2.*Y+Z+X)+T3*(2.*Z+X+Y) )
      GO TO 20
11    P=X*(W+0.5*(Y+Z))
      DP =T0*X + T1*(W+0.5*(Y+Z)) + (T2+T3)*0.5*X
20    DPT1=T0*P + W*DP
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      SUBROUTINE DREFCT (TX,TY,TZ, WT,XT,YT,ZT, DR0,DR1,DR2,DR3)
C
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE PSEUDO-REFERENCE.
C**** DERIVEES DES FONCTIONS RATIONNELLES R0, R1, R2 ET R3
C**** DANS LA DIRECTION (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT). WT=1,-XT-YT-ZT.
C**** NOUS SUPPOSONS QUE LE POINT (XT,YT,ZT) NE SOIT PAS SITUE SUR
C**** UNE ARETE DU TETRAEDRE.
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      T0=-T1-T2-T3
C**** DERIVEE DE R0.
      P =2.*X*Y*Y*Z*Z
      DP =2.*Y*Z*(T1*Y*Z+2.*X*(T2*Z+T3*Y))
      Q =(X+Y)*(X+Z)
      DR0=(DP - P*( (T1+T2)/(X+Y)+(T1+T3)/(X+Z) ))/Q
C**** DERIVEE DE R.

```

```

P =2.*X*X*Y*Y*Z*Z*W
DP =2.*X*Y*Z*( T0*X*Y*Z+2.*W*(T1*Y*Z+T2*X*Z+T3*X*Y) )
Q =(W+X)*(W+Y)*(W+Z)*(1.-Y)*(1.-Z)
R =P/Q
DR =(DP - P*( (T0+T1)/(W+X)+(T0+T2)/(W+Y)+(T0+T3)/(W+Z)
1      -T2/(1.-Y)-T3/(1.-Z) ))/Q
C**** DERIVEE DE R1.
P =R*Y*Z*(1.+X)
DP =DR*Y*Z*(1.+X) + R*( T1*Y*Z+(1.+X)*(T2*Z+T3*Y) )
Q =(1.-Y)*(1.-Z)
DR1=-DR - (DP - P*( -T2/(1.-Y)-T3/(1.-Z) ))/Q
C**** DERIVEE DE R2.
P =R*Z*(2.*X+Y)
DP =DR*Z*(2.*X+Y) + R*( (T1*2.+T2)*Z+T3*(2.*X+Y) )
Q =1.-Z
DR2=(DP - P*(-T3/Q))/Q
C**** DERIVEE DE R3.
P =R*Y*(2.*X+Z)
DP =DR*Y*(2.*X+Z) + R*( Y*(2.*T1+T3)+T2*(2.*X+Z) )
Q =1.-Y
DR3=(DP - P*(-T2/Q))/Q
RETURN
END
C-----
C
FUNCTION DWT11 (TX,TY,TZ, MUX,MUY,MUZ, WT,XT,YT,ZT)
C
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE PSEUDO-REFERENCE.
C**** DERIVEE DE LA FONCTION RATIONNELLE WT(1,1,MU) DANS LA DIRECTION
C**** (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT) DU TETRAEDRE DE REFERENCE.
C**** WT=1.-XT-YT-ZT.
C**** LA DIRECTION NORMALE DEPLACEE (MUX, MUY, MUZ) DEPEND DU TETRAEDRE
C**** GENERIQUE. NOUS SUPPOSONS QUE MUX+MUY+MUZ = 1.
REAL MUX,MUY,MUZ
DATA EPS /0.5E-06/
W=WT
X=XT
Y=YT
Z=ZT
IF (Y.GT.EPS .AND. W+Y.GT.EPS .AND.
1      Z.GT.EPS .AND. W+Z.GT.EPS) GO TO 30
C**** DANS LES FACES 3 ET 4, ON A
DWT11=0.0
RETURN
30 CONTINUE
T1=TX
T2=TY
T3=TZ
IF (X.GT.EPS .AND. W+X.GT.EPS) GO TO 40
C**** DANS LA FACE 2, ON A
DWT11=2.*T1*Y*Z
RETURN
40 CONTINUE
C**** A L'INTERIEUR DU TETRAEDRE ET A L'INTERIEUR DE LA FACE 1, ON A
CALL DREFCT(T1,T2,T3,W,X,Y,Z,DR0,DR1,DR2,DR3)
DWT11=DR0 + MUX*DR1 + MUY*DR2 + MUZ*DR3
RETURN
END
C-----

```

```

C
      SUBROUTINE DUT28 (NFCT, TX, TY, TZ, XT, YT, ZT, DUT)
C
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE PSEUDO-REFERENCE.
C**** DERIVEE DE UT(1), ..., UT(NFCT) DANS LA DIRECTION (TX, TY, TZ)
C**** AU POINT (XT, YT, ZT) DU TETRAEDRE DE REFERENCE.
C**** NFCT PEUT PRENDRE LES VALEURS 16 OU 28.
C**** LES DIRECTIONS NORMALES DEPLACEES MUX(I), MUY(I), MUZ(I), I=1(1)4,
C**** DEPENDENT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
      REAL LL, MUX, MUY, MUZ, NX, NY, NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4), Y(4), Z(4),
1          NX(4,3), NY(4,3), NZ(4,3), MUX(4), MUY(4), MUZ(4),
2          D(4,3,3), D5(12), Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3), IPERM(3)
      DIMENSION DUT(28)
      NFCS=NFCT
      XL=XT
      YL=YT
      ZL=ZT
      WL=1, -XL-YL-ZL
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      T0=-T1-T2-T3
      DO 90 I=1,4
C****      BLOC 1,  FONCTIONS NUMEROS 1 A 16.
          IND=4*I-3
          DUT(IND)=DPT1(0, T1, T2, T3, WL, XL, YL, ZL)
          DUT(IND+1)=DPT1(1, T1, T2, T3, WL, XL, YL, ZL)
          DUT(IND+2)=DPT1(1, T2, T3, T1, WL, YL, ZL, XL)
          DUT(IND+3)=DPT1(1, T3, T1, T2, WL, ZL, XL, YL)
          IF (NFCS.LE.16) GO TO 80
C****      BLOC 2,  FONCTIONS NUMEROS 17 A 28.
          IND=3*I+14
          DUT(IND)=DWT11(T1, T2, T3, MUX(I), MUY(I), MUZ(I), WL, XL, YL, ZL)
          DUT(IND+1)=DWT11(T2, T3, T1, MUY(I), MUZ(I), MUX(I), WL, YL, ZL, XL)
          DUT(IND+2)=DWT11(T3, T1, T2, MUZ(I), MUX(I), MUY(I), WL, ZL, XL, YL)
80      CH=WL
          WL=XL
          XL=YL
          YL=ZL
          ZL=CH
          CH=T0
          T0=T1
          T1=T2
          T2=T3
          T3=CH
90      CONTINUE
          RETURN
          END
C-----
C
      SUBROUTINE ELEM0 (X1, Y1, Z1, X2, Y2, Z2, X3, Y3, Z3, X4, Y4, Z4)
C
C-----
C**** ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** INITIALISATIONS RELATIVES AU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** ENTREES   :  X1, Y1, Z1, X2, Y2, Z2, X3, Y3, Z3, X4, Y4, Z4,  SOMMETS DU
C****               TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIES   :  TETRAS BLOC COMMUN PAR LEQUEL SE FONT LES SORTIES.

```

```

C****      LL      PARTIE LINEAIRE DE L'APPLICATION AFFINE L,
C****      FACTORISEE SELON LA METHODE DE GAUSS.
C****      IPERM    VECTEUR CONTENANT LA NOUVELLE NUMEROTATION DES
C****      LIGNES DE LL, CONSECUTIVE AU CHOIX DES PIVOTS.
C****      NX(I,J), NY(I,J), NZ(I,J), J=1,2,3, I=1(1)4, VECTEURS
C****      PARALLELES A LA I-EME FACE ET NORMAUX AUX
C****      ARETES DU TETRAEDRE.
C****      MUX(I), MUY(I), MUZ(I), I=1(1)4, DIRECTIONS NORMALES
C****      DEPLACEES. CHAQUE VECTEUR A ETE MULTIPLIE PAR
C****      UN SCALAIRE TEL QUE LE PRODUIT SATISFASSE
C****      MUX(I) + MUY(I) + MUZ(I) = 1, I=1(1)4.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
1      NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
2      D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION GEN(3),REF(3)
      X(1)=X1
      Y(1)=Y1
      Z(1)=Z1
      X(2)=X2
      Y(2)=Y2
      Z(2)=Z2
      X(3)=X3
      Y(3)=Y3
      Z(3)=Z3
      X(4)=X4
      Y(4)=Y4
      Z(4)=Z4
C**** PARTIE LINEAIRE DE L'APPLICATION AFFINE L.
      LL(1,1)=X(2)-X(1)
      LL(2,1)=Y(2)-Y(1)
      LL(3,1)=Z(2)-Z(1)
      LL(1,2)=X(3)-X(1)
      LL(2,2)=Y(3)-Y(1)
      LL(3,2)=Z(3)-Z(1)
      LL(1,3)=X(4)-X(1)
      LL(2,3)=Y(4)-Y(1)
      LL(3,3)=Z(4)-Z(1)
      CALL DECOMP(3,3,LL,GEN,IPERM,DET)
C**** VOL = ABS(DET)/6. EST LE VOLUME DU TETRAEDRE.
C**** SI LE TETRAEDRE EST DEGENERE (VOL=0.), LA SUBROUTINE DECOMP
C**** IMPRIME UN MESSAGE D'ERREUR.
      DO 60 I=1,4
        J=MOD(I,4)+1
        K=MOD(J,4)+1
        L=MOD(K,4)+1
C****      VECTEUR NORMAL A LA I-EME FACE, PLACE DANS GEN.
      GEN(1)=(Y(K)-Y(J))*(Z(L)-Z(J))-(Z(K)-Z(J))*(Y(L)-Y(J))
      GEN(2)=(Z(K)-Z(J))*(X(L)-X(J))-(X(K)-X(J))*(Z(L)-Z(J))
      GEN(3)=(X(K)-X(J))*(Y(L)-Y(J))-(Y(K)-Y(J))*(X(L)-X(J))
C****      VECTEURS PARALLELES A LA I-EME FACE ET NORMAUX AUX ARETES.
      NX(I,1)=GEN(2)*(Z(L)-Z(K))-GEN(3)*(Y(L)-Y(K))
      NY(I,1)=GEN(3)*(X(L)-X(K))-GEN(1)*(Z(L)-Z(K))
      NZ(I,1)=GEN(1)*(Y(L)-Y(K))-GEN(2)*(X(L)-X(K))
      S=SQRT(NX(I,1)**2+NY(I,1)**2+NZ(I,1)**2)
      NX(I,1)=NX(I,1)/S
      NY(I,1)=NY(I,1)/S
      NZ(I,1)=NZ(I,1)/S
      NX(I,2)=GEN(2)*(Z(J)-Z(L))-GEN(3)*(Y(J)-Y(L))
      NY(I,2)=GEN(3)*(X(J)-X(L))-GEN(1)*(Z(J)-Z(L))

```

```

      NZ(I,2)=GEN(1)*(Y(J)-Y(L))-GEN(2)*(X(J)-X(L))
      S=SQRT(NX(I,2)**2+NY(I,2)**2+NZ(I,2)**2)
      NX(I,2)=NX(I,2)/S
      NY(I,2)=NY(I,2)/S
      NZ(I,2)=NZ(I,2)/S
      NX(I,3)=GEN(2)*(Z(K)-Z(J))-GEN(3)*(Y(K)-Y(J))
      NY(I,3)=GEN(3)*(X(K)-X(J))-GEN(1)*(Z(K)-Z(J))
      NZ(I,3)=GEN(1)*(Y(K)-Y(J))-GEN(2)*(X(K)-X(J))
      S=SQRT(NX(I,3)**2+NY(I,3)**2+NZ(I,3)**2)
      NX(I,3)=NX(I,3)/S
      NY(I,3)=NY(I,3)/S
      NZ(I,3)=NZ(I,3)/S
C****  DIRECTION NORMALE DEPLACEE RELATIVE A LA I-EME FACE.
      CALL SOLVE (3,3,LL,GEN,REF,IPERM)
      GO TO (10,20,30,40), I
10      MUX(1)=REF(1)
      MUY(1)=REF(2)
      MUZ(1)=REF(3)
      GO TO 50
20      MUX(2)=REF(2)
      MUY(2)=REF(3)
      MUZ(2)=-REF(1)-REF(2)-REF(3)
      GO TO 50
30      MUX(3)=REF(3)
      MUY(3)=-REF(1)-REF(2)-REF(3)
      MUZ(3)=REF(1)
      GO TO 50
40      MUX(4)=-REF(1)-REF(2)-REF(3)
      MUY(4)=REF(1)
      MUZ(4)=REF(2)
50      S=MUX(I)+MUY(I)+MUZ(I)
      MUX(I)=MUX(I)/S
      MUY(I)=MUY(I)/S
      MUZ(I)=MUZ(I)/S
60  CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      SUBROUTINE U28 (NFCT, PX, PY, PZ, U)
C
C-----
C****  BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C****  VALEUR DE U(1), ..., U(NFCT) AU POINT (PX, PY, PZ) DU TETRAEDRE.
C****  NFCT PEUT PRENDRE LES VALEURS 16 OU 28.
      REAL LL, MUX, MUY, MUZ, NX, NY, NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4), Y(4), Z(4),
1          NX(4,3), NY(4,3), NZ(4,3), MUX(4), MUY(4), MUZ(4),
2          D(4,3,3), D5(12), Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3), IPERM(3)
      DIMENSION U(28), GEN(3), REF(3)
      DATA NERR/0/, EPS/-1.E-03/
      GEN(1)=PX-X(1)
      GEN(2)=PY-Y(1)
      GEN(3)=PZ-Z(1)
      CALL SOLVE(3,3,LL,GEN,REF,IPERM)
      XT=REF(1)
      YT=REF(2)
      ZT=REF(3)
      IF (XT.GT.EPS .AND. YT.GT.EPS .AND. ZT.GT.EPS .AND.
1      1, -XT-YT-ZT.GT.EPS) GO TO 20

```

```

C**** LE POINT (PX, PY, PZ) EST A L'EXTERIEUR DU TETRAEDRE GENERIQUE.
      IF (NERR.LT.10) PRINT 10
      10 FORMAT(10X,40H*** ERROR MESSAGE CALLED FROM U28      *** ,10X,
      1      33H THE POINT IS OUTSIDE THE ELEMENT      )
      NERR=NERR+1
      20 CONTINUE
C**** VALEURS DES FONCTIONS DE BASE.
      CALL UT28(NFCT,XT,YT,ZT,U)
      RETURN
      END

```

```

C-----
C

```

```

      SUBROUTINE DU28 (NFCT, VX,VY,VZ, PX,PY,PZ, DU)

```

```

C
C-----

```

```

C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** DERIVEE DE U(1), ..., U(NFCT) DANS LA DIRECTION (VX, VY, VZ)
C**** AU POINT (PX,PY,PZ) DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** NFCT PEUT PRENDRE LES VALEURS 16 OU 28.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
      1      NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
      2      D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION DU(28),GEN(3),REF(3)
      DATA NERR/0/, EPS/-1.E-03/
      GEN(1)=VX
      GEN(2)=VY
      GEN(3)=VZ
      CALL SOLVE(3,3,LL,GEN,REF,IPERM)
      TX=REF(1)
      TY=REF(2)
      TZ=REF(3)
      GEN(1)=PX-X(1)
      GEN(2)=PY-Y(1)
      GEN(3)=PZ-Z(1)
      CALL SOLVE(3,3,LL,GEN,REF,IPERM)
      XT=REF(1)
      YT=REF(2)
      ZT=REF(3)
      IF (XT.GT.EPS .AND. YT.GT.EPS .AND. ZT.GT.EPS .AND.
      1      1.-XT-YT-ZT.GT.EPS) GO TO 20
C**** LE POINT (PX, PY, PZ) EST A L'EXTERIEUR DU TETRAEDRE GENERIQUE.
      IF (NERR.LT.10) PRINT 10
      10 FORMAT(10X,40H*** ERROR MESSAGE CALLED FROM DU28      *** ,10X,
      1      33H THE POINT IS OUTSIDE THE ELEMENT      )
      NERR=NERR+1
      20 CONTINUE
C**** DERIVEES DES FONCTIONS DE BASE.
      CALL DUT28(NFCT,XT,TY,TZ,XT,YT,ZT,DU)
      RETURN
      END

```

```

C-----
C

```

```

      SUBROUTINE ELEM1

```

```

C
C-----

```

```

C**** MATRICE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** INITIALISATION DE L'INVERSE DES BLOCS DIAGONAUX DE LA MATRICE Q.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),

```



```

1      NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
2      D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
DO 10 I=1,4
  J=MOD(I,4)+1
  K=MOD(J,4)+1
  L=MOD(K,4)+1
C****  INITIALISATION DE D1, D2, D3 OU D4.
      D(I,1,1)=X(J)-X(I)
      D(I,1,2)=Y(J)-Y(I)
      D(I,1,3)=Z(J)-Z(I)
      D(I,2,1)=X(K)-X(I)
      D(I,2,2)=Y(K)-Y(I)
      D(I,2,3)=Z(K)-Z(I)
      D(I,3,1)=X(L)-X(I)
      D(I,3,2)=Y(L)-Y(I)
      D(I,3,3)=Z(L)-Z(I)
C****  INITIALISATION DE D5.
      IND=3*I-2
      D5(IND)=NX(I,1)*(2.*X(J)-X(K)-X(L))
1          +NY(I,1)*(2.*Y(J)-Y(K)-Y(L))
2          +NZ(I,1)*(2.*Z(J)-Z(K)-Z(L))
      D5(IND+1)=NX(I,2)*(2.*X(K)-X(L)-X(J))
1          +NY(I,2)*(2.*Y(K)-Y(L)-Y(J))
2          +NZ(I,2)*(2.*Z(K)-Z(L)-Z(J))
      D5(IND+2)=NX(I,3)*(2.*X(L)-X(J)-X(K))
1          +NY(I,3)*(2.*Y(L)-Y(J)-Y(K))
2          +NZ(I,3)*(2.*Z(L)-Z(J)-Z(K))
10 CONTINUE
RETURN
END

```

C-----

C

SUBROUTINE ELEM2

C

C-----

```

C****  MATRICE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C****  INITIALISATION DU BLOC Q1 DE Q.
REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
1      NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
2      D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
DIMENSION DU(28)
DO 40 I=1,4
  J=MOD(I,4)+1
  K=MOD(J,4)+1
  L=MOD(K,4)+1
  BX=0.5*(X(K)+X(L))
  BY=0.5*(Y(K)+Y(L))
  BZ=0.5*(Z(K)+Z(L))
  CALL DU28(16,NX(I,1),NY(I,1),NZ(I,1),BX,BY,BZ,DU)
  IND=3*I-2
  DO 10 M=1,16
    Q1(IND,M)=DU(M)
10 CONTINUE
  BX=0.5*(X(J)+X(L))
  BY=0.5*(Y(J)+Y(L))
  BZ=0.5*(Z(J)+Z(L))
  CALL DU28(16,NX(I,2),NY(I,2),NZ(I,2),BX,BY,BZ,DU)
  IND=IND+1
  DO 20 M=1,16

```

```

      Q1(IND,M)=DU(M)
20    CONTINUE
      BX=0.5*(X(K)+X(J))
      BY=0.5*(Y(K)+Y(J))
      BZ=0.5*(Z(K)+Z(J))
      CALL DU28(16,NX(I,3),NY(I,3),NZ(I,3),BX,BY,BZ,DU)
      IND=IND+1
      DO 30 M=1,16
        Q1(IND,M)=DU(M)
30    CONTINUE
40    CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      SUBROUTINE FE2P28 (C, S)
C
C-----
C**** ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** ENTREES : TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****             INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C****             ELEM1 ET ELEM2.
C****             C(1), ..., C(28) VALEURS DES PARAMETRES DE L'ELEMENT.
C**** SORTIES : S(1), ..., S(28) COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-
C****             POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****             L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** METHODE : RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE Q*S = C.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
1      NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
2      D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION C(28),S(28)
C**** CALCUL DE S(1), ..., S(16).
      DO 10 I=1,4
        K=4*I-3
        S(K)=C(K)
        S(K+1)=D(I,1,1)*C(K+1)+D(I,1,2)*C(K+2)+D(I,1,3)*C(K+3)
        S(K+2)=D(I,2,1)*C(K+1)+D(I,2,2)*C(K+2)+D(I,2,3)*C(K+3)
        S(K+3)=D(I,3,1)*C(K+1)+D(I,3,2)*C(K+2)+D(I,3,3)*C(K+3)
10    CONTINUE
C**** CALCUL DE S(17), ..., S(28).
      DO 30 I=1,12
        SI=0.0
        DO 20 J=1,16
          SI=SI+Q1(I,J)*S(J)
20    CONTINUE
        K=I+16
        S(K)=D5(I)*(C(K)-SI)
30    CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      FUNCTION DINOD (VX,VY,VZ, M, C)
C
C-----
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** DONNEES : M      PEUT PRENDRE LES VALEURS 1, 2, 3 OU 4.
C****             C(4*M-2), C(4*M-1) ET C(4*M) DERIVEES PARTIELLES DX,

```

```

C****          DY ET DZ AU SOMMET A(M).
C****          (VX, VY, VZ) UN VECTEUR.
C****  SORTIE   :  D1NOD  DERIVEE DANS LA DIRECTION (VX, VY, VZ)
C****          AU SOMMET A(M).

```

```

      DIMENSION C(28)
      IND=4*M-2
      D1NOD=VX*C(IND)+VY*C(IND+1)+VZ*C(IND+2)
      RETURN
      END

```

```

C-----
C

```

```

      SUBROUTINE FE2P16 (C, S)

```

```

C
C-----

```

```

C****  ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C****  A 16 PARAMETRES.
C****  RESOLUTION DU PROBLEME D'INTERPOLATION.
C****  ENTREES   :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****                INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C****                ELEM1 ET ELEM2.
C****                C(1), ..., C(16) VALEURS DES PARAMETRES DE L'ELEMENT.
C****  SORTIES   :  S(1), ..., S(28) COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-
C****                POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****                L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.

```

```

C****  LES MEMOIRES C(17), ..., C(28) SONT DES PLACES DE TRAVAIL.

```

```

      REAL LL, MUX, MUY, MUZ, NX, NY, NZ

```

```

      COMMON /TETRAS/ X(4), Y(4), Z(4),

```

```

      1      NX(4,3), NY(4,3), NZ(4,3), MUX(4), MUY(4), MUZ(4),

```

```

      2      D(4,3,3), D5(12), Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3), IPERM(3)

```

```

      DIMENSION C(28), S(28)

```

```

C****  CALCUL DES PARAMETRES C(17), ..., C(28).

```

```

      DO 10 I=1,4

```

```

         J=MOD(I,4)+1

```

```

         K=MOD(J,4)+1

```

```

         L=MOD(K,4)+1

```

```

         IND=3*I+14

```

```

         C(IND)=0.5*(D1NOD(NX(I,1), NY(I,1), NZ(I,1), K, C)

```

```

      1      +D1NOD(NX(I,1), NY(I,1), NZ(I,1), L, C))

```

```

         C(IND+1)=0.5*(D1NOD(NX(I,2), NY(I,2), NZ(I,2), L, C)

```

```

      1      +D1NOD(NX(I,2), NY(I,2), NZ(I,2), J, C))

```

```

         C(IND+2)=0.5*(D1NOD(NX(I,3), NY(I,3), NZ(I,3), J, C)

```

```

      1      +D1NOD(NX(I,3), NY(I,3), NZ(I,3), K, C))

```

```

      10 CONTINUE

```

```

C****  CALCUL DES COORDONNEES S(1), ..., S(28).

```

```

      CALL FE2P28(C, S)

```

```

      RETURN

```

```

      END

```

```

C-----
C

```

```

      FUNCTION FINT (PX, PY, PZ, S)

```

```

C
C-----

```

```

C****  ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,

```

```

C****  A 16 PARAMETRES.

```

```

C****  DONNEES   :  TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT

```

```

C****                INITIALISE A L'AIDE DE LA SUBROUTINE ELEM0.

```

```

C****                S(1), ..., S(28), COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-

```

```

C****                POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE

```

```

C****                L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.

```

```

C****                (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.

```

```

C**** SORTIE : FINT      VALEUR DE LA FONCTION D'INTERPOLATION DE
C****                  COORDONNEES S AU POINT (PX, PY, PZ).

```

```

      DIMENSION U(28),S(28)
      CALL U28(28,PX,PY,PZ,U)
      V=0.0
      DO 10 I=1,28
        V=V+S(I)*U(I)
10    CONTINUE
      FINT=V
      RETURN
      END

```

```

C-----
C

```

```

      FUNCTION DFINT (VX,VY,VZ, PX,PY,PZ, S)

```

```

C
C-----

```

```

C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** DONNEES : TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****              INITIALISE A L'AIDE DE LA SUBROUTINE ELEM0.
C****              S(1), ..., S(28), COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-
C****              POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****              L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C****              (VX, VY, VZ) UN VECTEUR.
C****              (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIE : DFINT DERIVEE DE LA FONCTION D'INTERPOLATION DE
C****              COORDONNEES S DANS LA DIRECTION (VX, VY, VZ)
C****              AU POINT (PX,PY,PZ).

```

```

      DIMENSION DU(28),S(28)
      CALL DU28(28,VX,VY,VZ,PX,PY,PZ,DU)
      DV=0.0
      DO 10 I=1,28
        DV=DV+S(I)*DU(I)
10    CONTINUE
      DFINT=DV
      RETURN
      END

```

```

C-----
C

```

```

      SUBROUTINE ELEM3

```

```

C
C-----

```

```

C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** BASE D'HERMITE.  INITIALISATION DE LA MATRICE T.
      REAL LL, MUX,MUY,MUZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
1      NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MUX(4),MUY(4),MUZ(4),
2      D(4,3,3),D5(12),Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION C(28), S(28)
      DATA C/28*0.0/
      DO 30 I=1,16
C****   CALCUL DES COEFFICIENTS T(1,I), ..., T(28,I) DU I-EME ELEMENT
C****   DE LA BASE D'HERMITE PAR RAPPORT A LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****   L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
        C(I)=1.0
        CALL FE2P16(C,S)
        DO 20 J=1,28
          T(J,I)=S(J)
20      CONTINUE
30    CONTINUE

```

```

      C(I)=0.0
30  CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      SUBROUTINE HERM (PX, PY, PZ, V)
C
C-----
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** BASE D'HERMITE.
C**** ENTREES : TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****              INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C****              ELEM1, ELEM2 ET ELEM3.
C****              (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIES : V(1), ..., V(16) VALEURS DES 16 FONCTIONS DE LA BASE
C****              D'HERMITE AU POINT (PX, PY, PZ).
      REAL LL, MUX, MUY, MUZ, NX, NY, NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4), Y(4), Z(4),
1      NX(4,3), NY(4,3), NZ(4,3), MUX(4), MUY(4), MUZ(4),
2      D(4,3,3), D5(12), Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3), IPERM(3)
      DIMENSION V(16), U(28)
      CALL U28(28, PX, PY, PZ, U)
      DO 20 I=1,16
          SUM=0.0
          DO 10 J=1,28
              SUM=SUM + T(J,I)*U(J)
10      CONTINUE
          V(I)=SUM
20  CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      SUBROUTINE DHERM (VX, VY, VZ, PX, PY, PZ, DV)
C
C-----
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** ENTREES : TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****              INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C****              ELEM1, ELEM2 ET ELEM3.
C****              (VX, VY, VZ) UN VECTEUR.
C****              (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIES : DV(1), ..., DV(16) DERIVEES DES 16 FONCTIONS DE LA
C****              BASE D'HERMITE DANS LA DIRECTION (VX, VY, VZ)
C****              AU POINT (PX, PY, PZ).
      REAL LL, MUX, MUY, MUZ, NX, NY, NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4), Y(4), Z(4),
1      NX(4,3), NY(4,3), NZ(4,3), MUX(4), MUY(4), MUZ(4),
2      D(4,3,3), D5(12), Q1(12,16), T(28,16), LL(3,3), IPERM(3)
      DIMENSION DV(16), DU(28)
      CALL DU28(28, VX, VY, VZ, PX, PY, PZ, DU)
      DO 20 I=1,16
          SUM=0.0
          DO 10 J=1,28
              SUM=SUM + T(J,I)*DU(J)
10      CONTINUE
          DV(I)=SUM

```

20 CONTINUE  
RETURN  
END

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

Nous devons satisfaire la condition 3.3-(iv):

- (i) La restriction de la dérivée normale  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 1$  à une variable,  $i = 1, 2, 3$ .

En tenant compte du fait que, pour  $u \in U$ , la restriction de  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 2$  à une variable, la condition à satisfaire s'écrit de façon équivalente

$$(ii) \quad \partial_{n_i} u (B_i) = \frac{1}{2} \{ \partial_{n_i} u (A_j) + \partial_{n_i} u (A_k) \}$$

c'est-à-dire

$$(iii) \quad G_i(u) = \frac{1}{2} \{ (n_i)_x F_{j1}(u) + (n_i)_y F_{j2}(u) + (n_i)_x F_{k1}(u) + (n_i)_y F_{k2}(u) \}$$

où  $(i, j, k)$  est une permutation cyclique des nombres  $(1, 2, 3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Précisons comment se calcule la solution de ce problème élément fini avec contraintes (voir 2.8).

#### Problème d'interpolation.

Soit  $c \in \mathbb{R}^9$  donné. Le problème d'interpolation 3.3-(iii) est résolu comme suit.

a) Nous calculons la valeur des trois paramètres remplacés

$$c_{10} = \frac{1}{2} \{ (n_1)_x c_5 + (n_1)_y c_6 + (n_1)_x c_8 + (n_1)_y c_9 \},$$

$$c_{11} = \frac{1}{2} \{ (n_2)_x c_8 + (n_2)_y c_9 + (n_2)_x c_2 + (n_2)_y c_3 \},$$

$$c_{12} = \frac{1}{2} \{ (n_3)_x c_2 + (n_3)_y c_3 + (n_3)_x c_5 + (n_3)_y c_6 \}.$$



Test 7.4-5.

Considérons une mosaïque de deux tétraèdres  $S_1$  et  $S_2$  possédant une face commune  $T$ . En se donnant 4 valeurs de paramètres en chacun des 5 sommets, nous déterminons  $v_1 \in V(S_1)$  et  $v_2 \in V(S_2)$ . En choisissant des points  $P \in T$ , nous avons vérifié que

$$\begin{aligned} v_1(P) &= v_2(P), & \partial_x v_1(P) &= \partial_x v_2(P), \\ \partial_y v_1(P) &= \partial_y v_2(P), & \partial_z v_1(P) &= \partial_z v_2(P). \end{aligned}$$

Test 7.4-6.

Soit  $S$  un tétraèdre. En choisissant 4 valeurs de paramètres en chacun des 4 sommets, nous déterminons un  $v \in V$ . Nous vérifions que la solution  $v$  de ce problème d'interpolation ne dépend pas de la numérotation des sommets de  $S$ . Soient  $P \in S$  et  $t \in \mathbb{R}^3$ ; calculons  $v(P)$  et  $\partial_t v(P)$  pour une numérotation  $A_1, A_2, A_3, A_4$  des sommets; nous avons répété le calcul de  $v(P)$  et  $\partial_t v(P)$  pour les 24 permutations des sommets de  $S$ .

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & , & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

- (iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i},$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

#### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

#### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

les blocs non diagonaux  $p \times p$  de cette matrice sont

$$\begin{aligned} & (FE_i(E_j^{-1} u_1), \dots, FE_i(E_j^{-1} u_p)) \\ &= (FE_{\sigma(i,j)} u_1, \dots, FE_{\sigma(i,j)} u_p) = 0; \end{aligned}$$

en effet, lorsque  $i \neq j$ ,  $E_{\sigma(i,j)} := E_i \circ E_j^{-1}$  n'est pas l'élément neutre.



### Exemple.

Soient  $\tilde{W} := \{w: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, w \text{ polynôme de degré } \leq 3\}$ ,

$$\alpha_1, \alpha_2: [0,1] \rightarrow [0,1], \alpha_1(x) := x, \alpha_2(x) := 1-x,$$

$$E_1, E_2: \tilde{W} \rightarrow \tilde{W}, E_i(w) := w \circ \alpha_i, i = 1, 2,$$

$$\tilde{F}: \tilde{W} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{F}w := \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix}.$$

Nous considérons le problème d'interpolation

$$\tilde{Q}w := \begin{pmatrix} \tilde{F}E_1 \\ \tilde{F}E_2 \end{pmatrix} (w) = \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \\ w(1) \\ -w'(1) \end{pmatrix}.$$

Nous choisissons la première partie d'une base d'interpolation

$$\tilde{u}_1(x) := (1-x)^3,$$

$$\tilde{u}_2(x) := (1-x)^2 x.$$

Nous obtenons

$$(Q(\tilde{u}_1), Q(\tilde{u}_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où la matrice  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$  est régulière.

Nous devons satisfaire la condition 3.3-(iv):

- (i) La restriction de la dérivée normale  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 1$  à une variable,  $i = 1, 2, 3$ .

En tenant compte du fait que, pour  $u \in U$ , la restriction de  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 2$  à une variable, la condition à satisfaire s'écrit de façon équivalente

$$(ii) \quad \partial_{n_i} u (B_i) = \frac{1}{2} \{ \partial_{n_i} u (A_j) + \partial_{n_i} u (A_k) \}$$

c'est-à-dire

$$(iii) \quad G_i(u) = \frac{1}{2} \{ (n_i)_x F_{j1}(u) + (n_i)_y F_{j2}(u) + (n_i)_x F_{k1}(u) + (n_i)_y F_{k2}(u) \}$$

où  $(i, j, k)$  est une permutation cyclique des nombres  $(1, 2, 3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Précisons comment se calcule la solution de ce problème élément fini avec contraintes (voir 2.8).

#### Problème d'interpolation.

Soit  $c \in \mathbb{R}^9$  donné. Le problème d'interpolation 3.3-(iii) est résolu comme suit.

a) Nous calculons la valeur des trois paramètres remplacés

$$c_{10} = \frac{1}{2} \{ (n_1)_x c_5 + (n_1)_y c_6 + (n_1)_x c_8 + (n_1)_y c_9 \},$$

$$c_{11} = \frac{1}{2} \{ (n_2)_x c_8 + (n_2)_y c_9 + (n_2)_x c_2 + (n_2)_y c_3 \},$$

$$c_{12} = \frac{1}{2} \{ (n_3)_x c_2 + (n_3)_y c_3 + (n_3)_x c_5 + (n_3)_y c_6 \}.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

#### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

#### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

Nous devons satisfaire la condition 3.3-(iv):

- (i) La restriction de la dérivée normale  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 1$  à une variable,  $i = 1, 2, 3$ .

En tenant compte du fait que, pour  $u \in U$ , la restriction de  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 2$  à une variable, la condition à satisfaire s'écrit de façon équivalente

$$(ii) \quad \partial_{n_i} u (B_i) = \frac{1}{2} \{ \partial_{n_i} u (A_j) + \partial_{n_i} u (A_k) \}$$

c'est-à-dire

$$(iii) \quad G_i(u) = \frac{1}{2} \{ (n_i)_x F_{j1}(u) + (n_i)_y F_{j2}(u) + (n_i)_x F_{k1}(u) + (n_i)_y F_{k2}(u) \}$$

où  $(i, j, k)$  est une permutation cyclique des nombres  $(1, 2, 3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Précisons comment se calcule la solution de ce problème élément fini avec contraintes (voir 2.8).

#### Problème d'interpolation.

Soit  $c \in \mathbb{R}^9$  donné. Le problème d'interpolation 3.3-(iii) est résolu comme suit.

a) Nous calculons la valeur des trois paramètres remplacés

$$c_{10} = \frac{1}{2} \{ (n_1)_x c_5 + (n_1)_y c_6 + (n_1)_x c_8 + (n_1)_y c_9 \},$$

$$c_{11} = \frac{1}{2} \{ (n_2)_x c_8 + (n_2)_y c_9 + (n_2)_x c_2 + (n_2)_y c_3 \},$$

$$c_{12} = \frac{1}{2} \{ (n_3)_x c_2 + (n_3)_y c_3 + (n_3)_x c_5 + (n_3)_y c_6 \}.$$



Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

$\partial_t v_1(P), \dots, \partial_t v_{16}(P)$  où  $t := (TX, TY, TZ)$  et  $P := (PX, PY, PZ)$ .

Remarque.

Une partie des communications entre les sous-programmes se fait au moyen d'un bloc commun nommé TETRAS. Ce bloc commun ne dépend que du tétraèdre considéré. Il est initialisé par les sous-routines ELEMØ, ELEM1, ELEM2 et ELEM3. Il est utilisé par HERM et DHERM.

8.3. Le programme FORTRAN.

Le programme suivant comprend 1124 cartes, imprimées à raison de 60 lignes par page.

```

C*****
C*****
C*****
C****
C****
C****      E L E M E N T      F I N I      T E T R A E D R I Q U E      ****
C****
C****      D E C L A S S E C 1,      D E D E G R E D E U X,      A S E I Z E P A R A M E T R E S.      ****
C****
C****
C****      V A R I A N T E I - C.                                M A R C E L D E L E Z E      ****
C****                                I N S T. D E M A T H.      ****
C****                                U N I V E R S I T E      ****
C****                                1 7 0 0 F R I B O U R G      ****
C****      F E V R I E R 1 9 7 8.                                S W I T Z E R L A N D      ****
C****
C*****
C*****
C-----
C

```

Les programmes ont été numérisés sous la forme de fichiers textes :

<http://www.deleze.name/~marcel//maths/FORTRAN/index.html>

```

      RETURN
11 PT1=X*W*(W+0.5*(Y+Z))
      RETURN
      END
C-----
C
      FUNCTION WT11 (WT,XT,YT,ZT)
C
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** VALEUR DU POLYNOME PAR MORCEAUX WT(1,1) AU POINT (XT,YT,ZT).
C**** WT EST INACTIF.
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      IF (X.GE.Y .AND. Z.GE.Y) GO TO 20
      IF (X.GE.Z .AND. Y.GE.Z) GO TO 30
C**** MORCEAU 1.
      WT11=X*( 2.*X*X/3.-X*Y-X*Z+2.*Y*Z )
      RETURN
C**** MORCEAU 2.
20 WT11=Y*Y*( Z-Y/3. )
      RETURN
C**** MORCEAU 3.
30 WT11=Z*Z*( Y-Z/3. )
      RETURN
      END
C-----

```

```

C
      FUNCTION ST10 (WT,XT,YT,ZT)
C
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** VALEUR DE LA FONCTION RATIONNELLE RT(1,0), RESTREINTE AU
C**** MORCEAU 1, AU POINT (XT,YT,ZT).   WT=1.-XT-YT-ZT.
C**** NOUS SUPPOSONS QUE LE POINT (XT,YT,ZT) NE SOIT PAS SITUE SUR
C**** UNE DES CINQ ARETES DU MORCEAU 1 APPARTENANT AU BORD DU TETRAEDRE.
      DATA EPS/0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      YMX=Y-X
      ZMX=Z-X
      IF (YMX.GT.EPS .OR. ZMX.GT.EPS) GO TO 10
C**** SUR LA DROITE X=Y=Z, ON A
      ST10=3.*X*X*W
      RETURN
10  CONTINUE
C**** DANS LE RESTE DU MORCEAU 1, ON A
      VAR=-X*W*( 3./(1.-3.*X) + 2./(Y+ZMX) )
      VAR=-YMX*ZMX*( 6.*X-2.*W-3.+VAR )
      VAR=VAR*( ZMX/(Y*(W+YMX))+YMX/(Z*(W+ZMX)) )/(YMX+ZMX)
      VAR=W*( 2.*(YMX+ZMX)+VAR )/((1.-3.*X)*(Y+ZMX))
      ST10=X*X*W*(3.+VAR)
      RETURN
      END
C-----
C
      FUNCTION RT10 (WT,XT,YT,ZT)
C
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** VALEUR DE LA FONCTION RATIONNELLE PAR MORCEAUX RT(1,0) AU POINT
C**** (XT,YT,ZT) DU TETRAEDRE DE REFERENCE.   WT=1.-XT-YT-ZT.
      DATA EPS/0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      IF (X.GT.EPS .AND. Y.GT.EPS .AND.
1    Z.GT.EPS .AND. W.GT.EPS ) GO TO 50
C**** SUR LE BORD DU TETRAEDRE, ON A
      RT10=0.0
      RETURN
50  CONTINUE
C**** A L'INTERIEUR DU TETRAEDRE, ON A
      IF (X.GT.Y .AND. Z.GE.Y) GO TO 200
      IF (X.GE.Z .AND. Y.GE.Z) GO TO 300
100  CONTINUE
C**** MORCEAU 1.
      RT10=ST10(W,X,Y,Z)
      RETURN
200  CONTINUE
C**** MORCEAU 2.
      CH=X
      X=Y
      Y=CH

```

```

      GO TO 100
300 CONTINUE
C**** MORCEAU 3.
      CH=X
      X=Z
      Z=CH
      GO TO 100
      END

```

```

C-----
C
      FUNCTION ST13 (WT,XT,YT,ZT)
C
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** VALEUR DE LA FONCTION RATIONNELLE RT(1,3), RESTREINTE AU
C**** MORCEAU 1, AU POINT (XT,YT,ZT).  WT=1.-XT-YT-ZT.
C**** NOUS SUPPOSONS QUE LE POINT (XT,YT,ZT) NE SOIT PAS SITUE SUR
C**** UNE DES CING ARETES DU MORCEAU 1 APPARTENANT AU BORD DU TETRAEDRE.
      DATA EPS/0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      YMX=Y-X
      ZMX=Z-X
      IF (YMX.GT.EPS .OR. ZMX.GT.EPS) GO TO 10
C**** SUR LA DROITE X=Y=Z, ON A
      ST13=0.0
      RETURN
10 CONTINUE
C**** DANS LE RESTE DU MORCEAU 1, ON A
      VAR=1./((1.-3.*X) - 1./(W+Y))
      VAR=-4.*X + 2.*Z + X*ZMX*VAR
      VAR=W*YMX*VAR / ( Y*(YMX+ZMX)*(W+YMX)*(W+Y)*(1.-3.*X) )
      VAR=VAR + 2./((W+X)*(W+ZMX) )
      ST13=2.*X*X*ZMX*ZMX+W*VAR
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      FUNCTION RT13 (WT,XT,YT,ZT)
C
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** VALEUR DE LA FONCTION RATIONNELLE PAR MORCEAUX RT(1,3) AU
C**** POINT (XT,YT,ZT).  WT=1.-XT-YT-ZT.
      DATA EPS/0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      IF (X.GE.Z .AND. Y.GE.Z) GO TO 300
      IF (X.GT.EPS .AND. Y.GT.EPS .AND.
1      Z.GT.EPS .AND. W.GT.EPS ) GO TO 50
C**** SUR LE BORD DU TETRAEDRE, ON A
      RT13=0.0
      RETURN
50 CONTINUE
C**** A L'INTERIEUR DU TETRAEDRE, ON A
      IF (X.GE.Y .AND. Z.GE.Y) GO TO 200

```

```

100 CONTINUE
C**** MORCEAU 1.
      RT13=ST13(W,X,Y,Z)
      RETURN
200 CONTINUE
C**** MORCEAU 2.
      CH=X
      X=Y
      Y=CH
      GO TO 100
300 CONTINUE
C**** MORCEAU 3.
      RT13=0.0
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      SUBROUTINE UT44 (NFCT, XT,YT,ZT, UT)
C
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** VALEUR DE UT(1), ... , UT(NFCT) AU POINT (XT,YT,ZT) DU TETRAEDRE
C**** DE REFERENCE.
C**** NFCT PEUT PRENDRE LES VALEURS 16, 28, 32 OU 44.
      DIMENSION UT(44)
      N=NFCT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      W=1.-X-Y-Z
      DO 20 I=1,4
C****   BLOC 1.  FONCTIONS NUMERO 1 A 16.
          IND=4*I - 3
          UT(IND )=PT1(0,W,X,Y,Z)
          UT(IND+1)=PT1(1,W,X,Y,Z)
          UT(IND+2)=PT1(1,W,Y,Z,X)
          UT(IND+3)=PT1(1,W,Z,X,Y)
          IF (N.LE.16) GO TO 10
C****   BLOC 2.  FONCTIONS NUMERO 17 A 28.
          IND=3*I+14
          UT(IND )=WT11(W,X,Y,Z)
          UT(IND+1)=WT11(W,Y,Z,X)
          UT(IND+2)=WT11(W,Z,X,Y)
          IF (N.LE.28) GO TO 10
C****   BLOC 3.  FONCTIONS NUMERO 29 A 32.
          UT(I+28 )=RT10(W,X,Y,Z)
          IF (N.LE.32) GO TO 10
C****   BLOC 4.  FONCTIONS NUMERO 33 A 44.
          IND=3*I+30
          UT(IND )=RT13(W,Y,Z,X)
          UT(IND+1)=RT13(W,Z,X,Y)
          UT(IND+2)=RT13(W,X,Y,Z)
10      CH=W
          W=X
          X=Y
          Y=Z
          Z=CH
20 CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      FUNCTION DPT1 (J, TX,TY,TZ, WT,XT,YT,ZT)
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** DERIVEE DU POLYNOME DE DEGRE TROIS PT(1,J) DANS LA DIRECTION
C**** (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT).
C**** J PEUT PRENDRE LES VALEURS 0 OU 1. WT=1,-XT-YT-ZT.
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      T0=-T1-T2-T3
      IF (J) 10,10,11
10  P=2,-W      =2.*(X*X+Y*Y+Z*Z+X*Y+Y*Z+Z*X)
      DP =-T0 - 2.*( T1*(2.*X+Y+Z)+T2*(2.*Y+Z+X)+T3*(2.*Z+X+Y) )
      G) TO 20
11  P=)*(W+0.5*(Y+Z))
      DP =T0*X + T1*(W+0.5*(Y+Z)) + (T2+T3)*0.5*X
20  DPT1=T0*P + W*DP
      RETURN
      EN)
C-----
C
      FUNCTION DWT11 (TX,TY,TZ, WT,XT,YT,ZT)
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** DERIVEE DU POLYNOME PAR MORCEAUX WT(1,1) DANS LA DIRECTION
C**** (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT).
C**** WT EST INACTIF.
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      IF (X,GE,Y .AND. Z,GE,Y) GO TO 20
      IF (X,GE,Z .AND. Y,GE,Z) GO TO 30
C**** MORCEAU 1.
      DWT11=2.*TX*(X*(X-Y-Z)+Y*Z) + X*(TY*(2.*Z-X)+TZ*(2.*Y-X))
      RETURN
C**** MORCEAU 2.
20  DWT11=Y*(TY*(2.*Z-Y) + TZ*Y)
      RETURN
C**** MORCEAU 3.
30  DWT11=Z*(TY*Z + TZ*(2.*Y-Z))
      RETURN
      END
C-----
C
      FUNCTION OST10 (TX,TY,TZ, WT,XT,YT,ZT)
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** DERIVEE DE LA FONCTION RATIONNELLE RT(1,0), RESTREINTE AU
C**** MORCEAU 1, DANS LA DIRECTION (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT).
C**** WT=1,-XT-YT-ZT.
C**** NOUS SUPPOSONS QUE LE POINT (XT,YT,ZT) NE SOIT PAS SITUE SUR

```

```

C**** UNE DES CING ARETES DU MORCEAU 1 APPARTENANT AU BORD DU TETRAEDRE.
DATA EPS/0.5E-06/
W=WT
X=XT
Y=YT
Z=ZT
YMX=Y-X
ZMX=Z-X
T1=TX
T2=TY
T3=TZ
T0=-T1-T2-T3
IF (YMX.GT.EPS .OR. ZMX.GT.EPS) GO TO 10
C**** SUR LA DROITE X=Y=Z, LA VALEUR ET LA DERIVEE DE C SONT NULLES.
V1=0.0
DV1=0.0
GO TO 20
10 CONTINUE
C**** DANS LE RESTE DU MORCEAU 1, ON A
C**** VALEUR ET DERIVEE DE A (PLACEES DANS V1, DV1).
P =X*W
DP =T1*W + T0*X
V1 =-P*( 3./(1.-3.*X) + 2./(Y+ZMX) )
DV1=-3.*(DP - P*( -3.*T1/(1.-3.*X) ))/(1.-3.*X)
1 -2.*(DP - P*( (T2+T3-T1)/(Y+ZMX) ))/(Y+ZMX)
C**** VALEUR ET DERIVEE DE B (PLACEES DANS V2,DV2).
P =6.*X-2.*W-3.*V1
V2 =-YMX*ZMX*P
DV2=-((T2-T1)*ZMX+YMX*(T3-T1))*P - YMX*ZMX*(6.*T1-2.*T0+DV1)
C**** VALEUR ET DERIVEE DE C (PLACEES DANS V1, DV1).
P =ZMX*V2
DP =(T3-T1)*V2 + ZMX*DV2
Q =(YMX+ZMX)*Y*(W+YMX)
V1 =P/Q
DV1=(DP - P*( (T2+T3-2.*T1)/(YMX+ZMX)+T2/Y+(T0+T2-T1)/(W+YMX) ))/Q
P =YMX*V2
DP =(T2-T1)*V2 + YMX*DV2
Q =(YMX+ZMX)*Z*(W+ZMX)
V1 =V1 + P/Q
DV1=DV1 + (DP - P*( (T2+T3-2.*T1)/(YMX+ZMX)+T3/Z
1 + (T0+T3-T1)/(W+ZMX) ))/Q
20 CONTINUE
C**** VALEUR ET DERIVEE DE D (PLACEES DANS V2, DV2).
P =W*( 2.*(YMX+ZMX)+V1 )
DP =T0*( 2.*(YMX+ZMX)+V1 ) + W*( 2.*(T2+T3-2.*T1)+DV1 )
Q =(1.-3.*X)*(Y+ZMX)
V2 =P/Q
DV2=(DP - P*( -3.*T1/(1.-3.*X)+(T2+T3-T1)/(Y+ZMX) ))/Q
C**** DERIVEE DE RT(1,0).
DST10=X*( (T1*2.*W+X*T0)*(3.+V2) + X*W*DV2 )
RETURN
END
C-----
C
FUNCTION DRT10 (TX,TY,TZ, WT,XT,YT,ZT)
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** DERIVEE DE LA FONCTION RATIONNELLE PAR MORCEAUX RT(1,0) DANS
C**** LA DIRECTION (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT). WT=1.-XT-YT-ZT.

```



```

DATA EPS/0.5E-06/
W=WT
X=XT
Y=YT
Z=ZT
IF (X.GT.EPS .AND. Y.GT.EPS .AND. Z.GT.EPS) GO TO 50
C**** DANS LES FACES 2, 3 ET 4, ON A
DRT10=0.0
RETURN
50 CONTINUE
T1=TX
T2=TY
T3=TZ
IF (X.GE.Y .AND. Z.GE.Y) GO TO 200
IF (X.GE.Z .AND. Y.GE.Z) GO TO 300
100 CONTINUE
C**** MORCEAU 1.
IF (W.GT.EPS) GO TO 150
C**** DANS L'INTERSECTION DU MORCEAU 1 ET DE LA FACE 1, ON A
DRT10= (-T1-T2-T3)*3.*X*X
RETURN
150 CONTINUE
C**** DANS L'INTERSECTION DU MORCEAU 1 ET DE L'INTERIEUR DU TETRAEDRE,
C**** ON A
DRT10=DST10(T1,T2,T3,W,X,Y,Z)
RETURN
200 CONTINUE
C**** MORCEAU 2,
CH=X
X=Y
Y=CH
CH=T1
T1=T2
T2=CH
GO TO 100
300 CONTINUE
C**** MORCEAU 3.
CH=X
X=Z
Z=CH
CH=T1
T1=T3
T3=CH
GO TO 100
END

C-----
C
FUNCTION DST13 (TX,TY,TZ, WT,XT,YT,ZT)
C
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** DERIVEE DE LA FONCTION RATIONNELLE RT(1,3), RESTREINTE AU
C**** MORCEAU 1, DANS LA DIRECTION (TX,TY,TZ) AU POINT (XT,YT,ZT).
C**** WT=1.-XT-YT-ZT.
C**** NOUS SUPPOSONS QUE LE POINT (XT,YT,ZT) NE SOIT PAS SITUE SUR
C**** UNE DES CING ARETES DU MORCEAU 1 APPARTENANT AU BORD DU TETRAEDRE.
DATA EPS/0.5E-06/
W=WT
X=XT
Y=YT

```

```

      Z=ZT
      YMX=Y-X
      ZMX=Z-X
      IF (YMX.GT.EPS .OR. ZMX.GT.EPS) GO TO 10
C**** SUR LA DROITE X=Y=Z, ON A
      DST13=0.0
      RETURN
10 CONTINUE
C**** DANS LE RESTE DU MORCEAU 1, ON A
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      T0=-T1-T2-T3
C**** VALEUR ET DERIVEE DE E.
      P =X*ZMX
      DP=T1*ZMX + X*(T3-T1)
      Q =1.-3.*X
      E =P/Q
      DE=(DP - E*(-3.*T1))/Q
      Q =W+Y
      E =-4.*X+2.*Z + E - P/Q
      DE=-4.*T1+2.*T3 + DE - ( DP - P*(T0+T2)/Q )/Q
C**** VALEUR ET DERIVEE DE F.
      P =W*YMX*E
      DP=T0*YMX*E + W*(T2-T1)*E + W*YMX*DE
      Q =Y*(YMX+ZMX)*(W+YMX)*(W+Y)*(1.-3.*X)
      F =P/Q
      DF=(DP - P*( T2/Y+(T2+T3-2.*T1)/(YMX+ZMX)+(T0+T2-T1)/(W+YMX)
1      + (T0+T2)/(W+Y)-3.*T1/(1.-3.*X) ))/Q
      Q =(W+X)*(W+ZMX)
      F =F + 2./Q
      DF=DF - 2.*( (T0+T1)/(W+X)+(T0+T3-T1)/(W+ZMX) )/Q
C**** DERIVEE DE DST13.
      DST13=2.*X*ZMX*( 2.*(T1*ZMX+X*(T3-T1))*W*F + X*ZMX*(T0*F+W*DF) )
      RETURN
      END

```

```

C-----
C

```

FUNCTION DRT13 (TX, TY, TZ, WT, XT, YT, ZT)

```

C
C-----

```

```

C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** DERIVEE DE LA FONCTION RATIONNELLE PAR MORCEAUX RT(1,3) DANS
C**** LA DIRECTION (TX, TY, TZ) AU POINT (XT, YT, ZT). WT=1.-XT-YT-ZT.
      DATA EPS/0.5E-06/
      W=WT
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      IF (X.GE.Z .AND. Y.GE.Z) GO TO 300
      IF (X.GT.EPS .AND. Y.GT.EPS .AND. Z.GT.EPS) GO TO 50
C**** DANS LES FACES 2, 3 ET 4, ON A
      DRT13=0.0
      RETURN
50 CONTINUE
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      IF (X.GE.Y .AND. Z.GE.Y) GO TO 200
100 CONTINUE

```

```

C**** MORCEAU 1.
      IF (W.GT.EPS) GO TO 150
C**** DANS L'INTERSECTION DU MORCEAU 1 ET DE LA FACE 1, ON A
      DRT13=4.*(-T1-T2-T3)*X*(Z-X)
      RETURN
      150 CONTINUE
C**** DANS L'INTERSECTION DU MORCEAU 1 ET DE L'INTERIEUR DU TETRAEDRE,
C**** ON A
      DRT13=DST13(T1,T2,T3,W,X,Y,Z)
      RETURN
      200 CONTINUE
C**** MORCEAU 2.
      CH=X
      X=Y
      Y=CH
      CH=T1
      T1=T2
      T2=CH
      GO TO 100
      300 CONTINUE
C**** MORCEAU 3.
      DRT13=0.0
      RETURN
      END

```

```

C-----
C

```

SUBROUTINE DUT44 (NFCT, TX, TY, TZ, XT, YT, ZT, DUT)

```

C
C-----

```

```

C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT DE REFERENCE.
C**** DERIVEE DE UT(1), ... , UT(NFCT) DANS LA DIRECTION (TX, TY, TZ)
C**** AU POINT (XT, YT, ZT).
C**** NFCT PEUT PRENDRE LES VALEURS 16, 28, 32 OU 44.
      DIMENSION DUT(44)
      N=NFCT
      T1=TX
      T2=TY
      T3=TZ
      T0=-T1-T2-T3
      X=XT
      Y=YT
      Z=ZT
      W=1.-X-Y-Z
      DO 20 I=1,4

```

```

C****   BLOC 1.  FONCTIONS NUMERO 1 A 16.
          IND=4*I-3
          DUT(IND )=DPT1(0,T1,T2,T3,W,X,Y,Z)
          DUT(IND+1)=DPT1(1,T1,T2,T3,W,X,Y,Z)
          DUT(IND+2)=DPT1(1,T2,T3,T1,W,Y,Z,X)
          DUT(IND+3)=DPT1(1,T3,T1,T2,W,Z,X,Y)
          IF (N.LE.16) GO TO 10

```

```

C****   BLOC 2.  FONCTIONS NUMERO 17 A 28.
          IND=3*I+14
          DUT(IND )=DWT11(T1,T2,T3,W,X,Y,Z)
          DUT(IND+1)=DWT11(T2,T3,T1,W,Y,Z,X)
          DUT(IND+2)=DWT11(T3,T1,T2,W,Z,X,Y)
          IF (N.LE.28) GO TO 10

```

```

C****   BLOC 3.  FONCTIONS NUMERO 29 A 32.
          DUT(I+28 )=DRT10(T1,T2,T3,W,X,Y,Z)
          IF (N.LE.32) GO TO 10

```

```

C**** BLOC 4.  FONCTIONS NUMERO 33 A 44.
      IND=3*I+30
      DUT(IND )=DRT13(T2,T3,T1,W,Y,Z,X)
      DUT(IND+1)=DRT13(T3,T1,T2,W,Z,X,Y)
      DUT(IND+2)=DRT13(T1,T2,T3,W,X,Y,Z)
10    CH=W
      W=X
      X=Y
      Y=Z
      Z=CH
      CH=T0
      T0=T1
      T1=T2
      T2=T3
      T3=CH
20    CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      SUBROUTINE ELEM0 (X1,Y1,Z1, X2,Y2,Z2, X3,Y3,Z3, X4,Y4,Z4)
C
C-----
C**** ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** INITIALISATIONS RELATIVES AU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** ENTREES   : (X1,Y1,Z1), (X2,Y2,Z2), (X3,Y3,Z3), (X4,Y4,Z4) SOMMETS
C****              DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIES   : TETRAS BLOC COMMUN PAR LEQUEL SE FONT LES SORTIES.
C****              LL     PARTIE LINEAIRE DE L'APPLICATION AFFINE L,
C****              FACTORISEE SELON LA METHODE DE GAUSS.
C****              IPERM  VECTEUR CONTENANT LA NOUVELLE NUMEROTATION DES
C****              LIGNES DE LL, CONSECUTIVE AU CHOIX DES PIVOTS.
C****              MX(I), MY(I), MZ(I), VECTEUR NORMAL A LA I-EME FACE DU
C****              TETRAEDRE, I=1(1)4.
C****              NX(I,J), NY(I,J), NZ(I,J), J=1,2,3, VECTEURS PARAL-
C****              LELES A LA I-EME FACE ET NORMAUX AUX ARETES DU
C****              TETRAEDRE, I=1(1)4.
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
1          NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
2          D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,26),Q3(12,32),
3          T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION AUX(3)
      X(1)=X1
      Y(1)=Y1
      Z(1)=Z1
      X(2)=X2
      Y(2)=Y2
      Z(2)=Z2
      X(3)=X3
      Y(3)=Y3
      Z(3)=Z3
      X(4)=X4
      Y(4)=Y4
      Z(4)=Z4
C**** PARTIE LINEAIRE DE L'APPLICATION AFFINE L.
      LL(1,1)=X(2)-X(1)
      LL(2,1)=Y(2)-Y(1)
      LL(3,1)=Z(2)-Z(1)
      LL(1,2)=X(3)-X(1)

```

```

      LL(2,2)=Y(3)-Y(1)
      LL(3,2)=Z(3)-Z(1)
      LL(1,3)=X(4)-X(1)
      LL(2,3)=Y(4)-Y(1)
      LL(3,3)=Z(4)-Z(1)
C**** FACTORISATION DE LL.
      CALL DECOMP(3,3,LL,AUX,IPERM,DET)
C**** VOL = ABS(DET)/6. EST LE VOLUME DU TETRAEDRE.
C**** SI LE TETRAEDRE EST DEGENERE (VOL=0.), LA SUBROUTINE DECOMP
C**** IMPRIME UN MESSAGE D'ERREUR.

```

```

      DO 10 I=1,4

```

```

         J=MOD(I,4)+1

```

```

         K=MOD(J,4)+1

```

```

         L=MOD(K,4)+1

```

```

C**** INITIALISATION DU VECTEUR (MX(I), MY(I), MZ(I)).

```

```

      MX(I)=(Y(K)-Y(J))*(Z(L)-Z(J)) - (Z(K)-Z(J))*(Y(L)-Y(J))

```

```

      MY(I)=(Z(K)-Z(J))*(X(L)-X(J)) - (X(K)-X(J))*(Z(L)-Z(J))

```

```

      MZ(I)=(X(K)-X(J))*(Y(L)-Y(J)) - (Y(K)-Y(J))*(X(L)-X(J))

```

```

      S=SQRT(MX(I)**2 + MY(I)**2 + MZ(I)**2)

```

```

      MX(I)=MX(I)/S

```

```

      MY(I)=MY(I)/S

```

```

      MZ(I)=MZ(I)/S

```

```

C**** VECTEURS (NX(I,J), NY(I,J), NZ(I,J)), J=1,2,3.

```

```

      NX(I,1)=MY(I)*(Z(L)-Z(K)) - MZ(I)*(Y(L)-Y(K))

```

```

      NY(I,1)=MZ(I)*(X(L)-X(K)) - MX(I)*(Z(L)-Z(K))

```

```

      NZ(I,1)=MX(I)*(Y(L)-Y(K)) - MY(I)*(X(L)-X(K))

```

```

      S=SQRT(NX(I,1)**2+NY(I,1)**2+NZ(I,1)**2)

```

```

      NX(I,1)=NX(I,1)/S

```

```

      NY(I,1)=NY(I,1)/S

```

```

      NZ(I,1)=NZ(I,1)/S

```

```

      NX(I,2)=MY(I)*(Z(J)-Z(L)) - MZ(I)*(Y(J)-Y(L))

```

```

      NY(I,2)=MZ(I)*(X(J)-X(L)) - MX(I)*(Z(J)-Z(L))

```

```

      NZ(I,2)=MX(I)*(Y(J)-Y(L)) - MY(I)*(X(J)-X(L))

```

```

      S=SQRT(NX(I,2)**2+NY(I,2)**2+NZ(I,2)**2)

```

```

      NX(I,2)=NX(I,2)/S

```

```

      NY(I,2)=NY(I,2)/S

```

```

      NZ(I,2)=NZ(I,2)/S

```

```

      NX(I,3)=MY(I)*(Z(K)-Z(J)) - MZ(I)*(Y(K)-Y(J))

```

```

      NY(I,3)=MZ(I)*(X(K)-X(J)) - MX(I)*(Z(K)-Z(J))

```

```

      NZ(I,3)=MX(I)*(Y(K)-Y(J)) - MY(I)*(X(K)-X(J))

```

```

      S=SQRT(NX(I,3)**2+NY(I,3)**2+NZ(I,3)**2)

```

```

      NX(I,3)=NX(I,3)/S

```

```

      NY(I,3)=NY(I,3)/S

```

```

      NZ(I,3)=NZ(I,3)/S

```

```

10 CONTINUE

```

```

      RETURN

```

```

      END

```

```

C-----
C

```

```

      SUBROUTINE U44 (NFCT, PX, PY, PZ, U)

```

```

C-----
C

```

```

C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.

```

```

C**** ENTREES : TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT

```

```

C**** INITIALISE A L'AIDE DE LA SUBROUTINE ELEM0.

```

```

C**** NFCT PEUT PRENDRE LES VALEURS 16, 28, 32 OU 44.

```

```

C**** (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.

```

```

C**** SORTIE : U(1), ..., U(NFCT) VALEURS DES NFCT PREMIERES FONC-

```

```

C**** TIONS DE BASE AU POINT (PX, PY, PZ).

```

```

      REAL LL, MX, MY, MZ, NX, NY, NZ

```

```

COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
1      NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
2      D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
3      T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
DIMENSION U(44), GEN(3), REF(3)
DATA NERR/0/, EPS/-1.E-03/
GEN(1)=PX-X(1)
GEN(2)=PY-Y(1)
GEN(3)=PZ-Z(1)
CALL SOLVE(3,3,LL,GEN,REF,IPERM)
XT=REF(1)
YT=REF(2)
ZT=REF(3)
IF (XT.GT.EPS .AND. YT.GT.EPS .AND. ZT.GT.EPS .AND.
1    1.-XT-YT-ZT.GT.EPS) GO TO 20
C**** LE POINT (PX,PY,PZ) EST A L'EXTERIEUR DU TETRAEDRE GENERIQUE.
IF (NERR.LT.10) PRINT 10
10  FORMAT(10X, 40H*** ERROR MESSAGE CALLED FROM U44      *** ,10X,
1    33H THE POINT IS OUTSIDE THE ELEMENT )
NERR=NERR+1
20  CONTINUE
C**** VALEURS DES FONCTIONS DE BASE.
CALL UT44(NFCT,XT,YT,ZT,U)
RETURN
END

C-----
C
SUBROUTINE DU44 (NFCT, VX,VY,VZ, PX,PY,PZ, DU)
C
C-----
C**** BASE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** ENTREES : TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****             INITIALISE A L'AIDE DE LA SUBROUTINE ELEM0.
C****             NFCT PEUT PRENDRE LES VALEURS 16, 28, 32 OU 44.
C****             (VX, VY, VZ) UN VECTEUR.
C****             (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIE : DU(1), ..., DU(NFCT) DERIVEES DES NFCT PREMIERES
C****             FONCTIONS DE BASE DANS LA DIRECTION (VX,VY,VZ)
C****             AU POINT (PX, PY, PZ).
REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
1      NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
2      D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
3      T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
DIMENSION DU(44), GEN(3), REF(3)
DATA NERR/0/, EPS/-1.E-03/
GEN(1)=VX
GEN(2)=VY
GEN(3)=VZ
CALL SOLVE(3,3,LL,GEN,REF,IPERM)
TX=REF(1)
TY=REF(2)
TZ=REF(3)
GEN(1)=PX-X(1)
GEN(2)=PY-Y(1)
GEN(3)=PZ-Z(1)
CALL SOLVE(3,3,LL,GEN,REF,IPERM)
XT=REF(1)
YT=REF(2)
ZT=REF(3)

```

```

      IF (XT.GT.EPS .AND. YT.GT.EPS .AND. ZT.GT.EPS .AND.
1      1,-XT-YT-ZT.GT.EPS) GO TO 20
C**** LE POINT (PX,PY,PZ) EST A L'EXTERIEUR DU TETRAEDRE GENERIQUE.
      IF (NERR.LT.10) PRINT 10
10  FORMAT(10X, 40H*** ERROR MESSAGE CALLED FROM DU44   *** ,10X,
1      33H THE POINT IS OUTSIDE THE ELEMENT   )
      NERR=NERR+1
20  CONTINUE
C**** DERIVEES DES FONCTIONS DE BASE.
      CALL DUT44(NFCT,TX,TY,TZ,XT,YT,ZT,DU)
      RETURN
      END
C-----
C
      SUBROUTINE ELEM1
C-----
C**** MATRICE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** INITIALISATION DE L'INVERSE DES BLOCS DIAGONAUX DE LA MATRICE Q.
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
1      NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
2      D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
3      T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DO 10 I=1,4
        J=MOD(I,4)+1
        K=MOD(J,4)+1
        L=MOD(K,4)+1
C**** INITIALISATION DE D1, D2, D3 ET D4.
        D(I,1,1)=X(J)-X(I)
        D(I,1,2)=Y(J)-Y(I)
        D(I,1,3)=Z(J)-Z(I)
        D(I,2,1)=X(K)-X(I)
        D(I,2,2)=Y(K)-Y(I)
        D(I,2,3)=Z(K)-Z(I)
        D(I,3,1)=X(L)-X(I)
        D(I,3,2)=Y(L)-Y(I)
        D(I,3,3)=Z(L)-Z(I)
C**** INITIALISATION DE D5.
        IND=3*I-2
        D5(IND )= NX(I,1)*(2.*X(J)-X(K)-X(L))
1          +NY(I,1)*(2.*Y(J)-Y(K)-Y(L))
2          +NZ(I,1)*(2.*Z(J)-Z(K)-Z(L))
        D5(IND+1)= NX(I,2)*(2.*X(K)-X(L)-X(J))
1          +NY(I,2)*(2.*Y(K)-Y(L)-Y(J))
2          +NZ(I,2)*(2.*Z(K)-Z(L)-Z(J))
        D5(IND+2)= NX(I,3)*(2.*X(L)-X(J)-X(K))
1          +NY(I,3)*(2.*Y(L)-Y(J)-Y(K))
2          +NZ(I,3)*(2.*Z(L)-Z(J)-Z(K))
C**** INITIALISATION DE D6.
        D6(I)= MX(I)*(3.*X(I)-X(J)-X(K)-X(L))
1          +MY(I)*(3.*Y(I)-Y(J)-Y(K)-Y(L))
2          +MZ(I)*(3.*Z(I)-Z(J)-Z(K)-Z(L))
C**** INITIALISATION DE D7.
        IND=3*I-2
        D7(IND )=D6(I)
        D7(IND+1)=D6(I)
        D7(IND+2)=D6(I)
10  CONTINUE
      RETURN

```

END

```

C-----
C
SUBROUTINE ELEM2
C-----
C**** MATRICE D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** INITIALISATION DES BLOCS SOUS-DIAGONAUX DE LA MATRICE Q.
REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
1      NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
2      D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
3      T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
DIMENSION DU(44)
DO 80 I=1,4
  J=MOD(I,4)+1
  K=MOD(J,4)+1
  L=MOD(K,4)+1
C**** INITIALISATION DU BLOC Q1.
  PX=0.5*(X(K)+X(L))
  PY=0.5*(Y(K)+Y(L))
  PZ=0.5*(Z(K)+Z(L))
  CALL DU44(16,NX(I,1),NY(I,1),NZ(I,1),PX,PY,PZ,DU)
  IND=3*I-2
  DO 10 M=1,16
    Q1(IND,M)=DU(M)
10  CONTINUE
  PX=0.5*(X(J)+X(L))
  PY=0.5*(Y(J)+Y(L))
  PZ=0.5*(Z(J)+Z(L))
  CALL DU44(16,NX(I,2),NY(I,2),NZ(I,2),PX,PY,PZ,DU)
  IND=IND+1
  DO 20 M=1,16
    Q1(IND,M)=DU(M)
20  CONTINUE
  PX=0.5*(X(K)+X(J))
  PY=0.5*(Y(K)+Y(J))
  PZ=0.5*(Z(K)+Z(J))
  CALL DU44(16,NX(I,3),NY(I,3),NZ(I,3),PX,PY,PZ,DU)
  IND=IND+1
  DO 30 M=1,16
    Q1(IND,M)=DU(M)
30  CONTINUE
C**** INITIALISATION DU BLOC Q2.
  PX=(X(J)+X(K)+X(L))/3.
  PY=(Y(J)+Y(K)+Y(L))/3.
  PZ=(Z(J)+Z(K)+Z(L))/3.
  CALL DU44(28,MX(I),MY(I),MZ(I),PX,PY,PZ,DU)
  DO 40 M=1,28
    Q2(I,M)=DU(M)
40  CONTINUE
C**** INITIALISATION DU BLOC Q3.
  PX=(4.*X(J)+X(K)+X(L))/6.
  PY=(4.*Y(J)+Y(K)+Y(L))/6.
  PZ=(4.*Z(J)+Z(K)+Z(L))/6.
  CALL DU44(32,MX(I),MY(I),MZ(I),PX,PY,PZ,DU)
  IND=3*I-2
  DO 50 M=1,32
    Q3(IND,M)=DU(M)
50  CONTINUE

```



```

        PX=(X(J)+4.*X(K)+X(L))/6.
        PY=(Y(J)+4.*Y(K)+Y(L))/6.
        PZ=(Z(J)+4.*Z(K)+Z(L))/6.
        CALL DU44(32,MX(I),MY(I),MZ(I),PX,PY,PZ,DU)
        IND=IND+1
        DO 60 M=1,32
            Q3(IND,M)=DU(M)
60      CONTINUE
        PX=(X(J)+X(K)+4.*X(L))/6.
        PY=(Y(J)+Y(K)+4.*Y(L))/6.
        PZ=(Z(J)+Z(K)+4.*Z(L))/6.
        CALL DU44(32,MX(I),MY(I),MZ(I),PX,PY,PZ,DU)
        IND=IND+1
        DO 70 M=1,32
            Q3(IND,M)=DU(M)
70      CONTINUE
80     CONTINUE
        RETURN
        END

```

```

C-----
C
      SUBROUTINE FE2P44 (C, S)
C-----
C**** ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** RESOLUTION DU PROBLEME D'INTERPOLATION.
C**** ENTREES : TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****              INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C****              ELEM1 ET ELEM2.
C****              C(1), ..., C(44) VALEURS DES PARAMETRES DE L'ELEMENT.
C**** SORTIE : S(1), ..., S(44) COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-
C****              POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****              L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** METHODE : RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE Q*S=C.
      REAL LL, MX, MY, MZ, NX, NY, NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4), Y(4), Z(4),
1         NX(4,3), NY(4,3), NZ(4,3), MX(4), MY(4), MZ(4),
2         D(4,3,3), D5(12), D6(4), D7(12), Q1(12,16), Q2(4,28), Q3(12,32),
3         T(44,16), LL(3,3), IPERM(3)
      DIMENSION C(44), S(44)
C**** CALCUL DE S(1), ..., S(16).
      DO 10 I=1,4
          K=4*I-3
          S(K)=C(K)
          S(K+1)=D(I,1,1)*C(K+1)+D(I,1,2)*C(K+2)+D(I,1,3)*C(K+3)
          S(K+2)=D(I,2,1)*C(K+1)+D(I,2,2)*C(K+2)+D(I,2,3)*C(K+3)
          S(K+3)=D(I,3,1)*C(K+1)+D(I,3,2)*C(K+2)+D(I,3,3)*C(K+3)
10     CONTINUE
C**** CALCUL DE S(17), ..., S(28).
      DO 30 I=1,12
          SI=0.0
          DO 20 J=1,16
              SI=SI+Q1(I,J)*S(J)
20      CONTINUE
          K=I+16
          S(K)=D5(I)*(C(K)-SI)
30     CONTINUE
C**** CALCUL DE S(29), ..., S(32).
      DO 50 I=1,4
          SI=0.0

```

```

      DO 40 J=1,28
        SI=SI+Q2(I,J)*S(J)
40    CONTINUE
      K=28+I
      S(K)=D6(I)*(C(K)-SI)
50    CONTINUE
C**** CALCUL DE S(33), ..., S(44).
      DO 70 I=1,12
        SI=0.0
        DO 60 J=1,32
          SI=SI+Q3(I,J)*S(J)
60    CONTINUE
      K=I+32
      S(K)=D7(I)*(C(K)-SI)
70    CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      FUNCTION D1NOD (VX,VY,VZ, M, C)
C
C-----
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** DONNEES : M PEUT PRENDRE LES VALEURS 1, 2, 3 OU 4.
C**** C(4*M-2), C(4*M-1) ET C(4*M) DERIVEES PARTIELLES DX,
C**** DY ET DZ AU SOMMET A(M).
C**** (VX, VY, VZ) UN VECTEUR.
C**** SORTIE : D1NOD DERIVEE DANS LA DIRECTION (VX, VY, VZ)
C**** AU SOMMET A(M).
      DIMENSION C(44)
      IND=4*M-2
      D1NOD=VX*C(IND) + VY*C(IND+1) + VZ*C(IND+2)
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      SUBROUTINE FE2P16 (C, S)
C
C-----
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** RESOLUTION DU PROBLEME D'INTERPOLATION.
C**** ENTREES : TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C**** INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C**** ELEM1 ET ELEM2.
C**** C(1), ..., C(16) VALEURS DES PARAMETRES DE L'ELEMENT.
C**** SORTIE : S(1), ..., S(44) COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-
C**** POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE
C**** L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C**** LES MEMOIRES C(17), ..., C(44) SONT DES PLACES DE TRAVAIL.
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
1      NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
2      D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
3      T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION C(44), S(44)
      DO 10 I=1,4
        J=MOD(I,4)+1
        K=MOD(J,4)+1

```

```

      L=MOD(K,4)+1
C****  CALCUL DES PARAMETRES C(17) A C(28).
      IND=3*I+14
      C(IND)=0.5*( D1NOD(NX(I,1),NY(I,1),NZ(I,1),K,C)
1          +D1NOD(NX(I,1),NY(I,1),NZ(I,1),L,C) )
      C(IND+1)=0.5*( D1NOD(NX(I,2),NY(I,2),NZ(I,2),L,C)
1          +D1NOD(NX(I,2),NY(I,2),NZ(I,2),J,C) )
      C(IND+2)=0.5*( D1NOD(NX(I,3),NY(I,3),NZ(I,3),J,C)
1          +D1NOD(NX(I,3),NY(I,3),NZ(I,3),K,C) )
C****  CALCUL DES PARAMETRES C(29) A C(32).
      DJ=D1NOD(MX(I),MY(I),MZ(I),J,C)
      DK=D1NOD(MX(I),MY(I),MZ(I),K,C)
      DL=D1NOD(MX(I),MY(I),MZ(I),L,C)
      C(I+28)=(DJ+DK+DL)/3.
C****  CALCUL DES PARAMETRES C(33) A C(44).
      IND=3*I+30
      C(IND)=(4.*DJ+DK+DL)/6.
      C(IND+1)=(DJ+4.*DK+DL)/6.
      C(IND+2)=(DJ+DK+4.*DL)/6.
10  CONTINUE
C****  CALCUL DES COORDONNEES S(1), ..., S(44).
      CALL FE2P44(C,S)
      RETURN
      END
C-----
C
      FUNCTION FINT (PX,PY,PZ, S)
C
C-----
C****  ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C****  A 16 PARAMETRES.
C****  DONNEES : TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****              INITIALISE A L'AIDE DE LA SUBROUTINE ELEM0.
C****              S(1), ..., S(44) COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-
C****              POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****              L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
C****              (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C****  SORTIE : FINT VALEUR DE LA FONCTION D'INTERPOLATION DE
C****              COORDONNEES S AU POINT (PX, PY, PZ).
      DIMENSION U(44), S(44)
      CALL U44(44,PX,PY,PZ,U)
      V=0.0
      DO 10 I=1,44
          V=V+S(I)*U(I)
10  CONTINUE
      FINT=V
      RETURN
      END
C-----
C
      FUNCTION DFINT (VX,VY,VZ, PX,PY,PZ, S)
C
C-----
C****  ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C****  A 16 PARAMETRES.
C****  DONNEES : TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****              INITIALISE A L'AIDE DE LA SUBROUTINE ELEM0.
C****              S(1), ..., S(44) COORDONNEES DE LA FONCTION D'INTER-
C****              POLATION DANS LA BASE D'INTERPOLATION DE
C****              L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.

```

```

C****      (VX, VY, VZ) UN VECTEUR.
C****      (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIE : DFINT DERIVEE DE LA FONCTION D'INTERPOLATION DE
C****      COORDONNEES S DANS LA DIRECTION (VX, VY, VZ)
C****      AU POINT (PX,PY,PZ).

```

```

      DIMENSION DU(44), S(44)
      CALL DU44(44,VX,VY,VZ,PX,PY,PZ,DU)
      DV=0.0
      DO 10 I=1,44
        DV=DV+S(I)*DU(I)
10    CONTINUE
      DFINT=DV
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      SUBROUTINE ELEM3
C
C-----
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** BASE D'HERMITE. INITIALISATION DE LA MATRICE T.
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
1      NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
2      D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
3      T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION C(44), S(44)
      DATA C/44*0.0/
      DO 20 I=1,16
C****      CALCUL DES COORDONNEES T(1,I), ..., T(44,I) DU I-EME ELEMENT
C****      DE LA BASE D'HERMITE PAR RAPPORT A LA BASE D'INTERPOLATION
C****      DE L'ELEMENT GENERIQUE ELARGI.
        C(I)=1.0
        CALL FE2P16(C,S)
        DO 10 J=1,44
          T(J,I)=S(J)
10      CONTINUE
        C(I)=0.0
20    CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      SUBROUTINE HERM (PX,PY,PZ, V)
C
C-----
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** BASE D'HERMITE.
C**** ENTREES : TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****      INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C****      ELEM1, ELEM2 ET ELEM3.
C****      (PX, PY, PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIE : V(1), ..., V(16) VALEURS DES 16 FONCTIONS DE LA BASE
C****      D'HERMITE AU POINT (PX, PY, PZ).
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
1      NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
2      D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),

```

```

3      T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION V(16), U(44)
      CALL U44(44,PX,PY,PZ,U)
      DO 20 I=1,16
        SI=0.0
        DO 10 J=1,44
          SI=SI + T(J,I)*U(J)
10      CONTINUE
        V(I)=SI
20 CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C-----
C
      SUBROUTINE DHERM (VX,VY,VZ, PX,PY,PZ, DV)
C-----
C**** ELEMENT FINI GENERIQUE, DE CLASSE C1, DE DEGRE DEUX,
C**** A 16 PARAMETRES.
C**** BASE D'HERMITE.
C**** ENTREES : TETRAS BLOC COMMUN QUI DOIT AVOIR ETE PREALABLEMENT
C****              INITIALISE A L'AIDE DES SUBROUTINES ELEM0,
C****              ELEM1, ELEM2 ET ELEM3.
C****              (VX, VY, VZ) UN VECTEUR.
C****              (PX, PY,PZ) UN POINT DU TETRAEDRE GENERIQUE.
C**** SORTIE : DV(1), ..., DV(16) DERIVEES DES 16 FONCTIONS DE LA
C****              BASE D'HERMITE DANS LA DIRECTION (VX, VY, VZ)
C****              AU POINT (PX, PY, PZ).
      REAL LL, MX,MY,MZ, NX,NY,NZ
      COMMON /TETRAS/ X(4),Y(4),Z(4),
1      NX(4,3),NY(4,3),NZ(4,3), MX(4),MY(4),MZ(4),
2      D(4,3,3),D5(12),D6(4),D7(12), Q1(12,16),Q2(4,28),Q3(12,32),
3      T(44,16), LL(3,3),IPERM(3)
      DIMENSION DV(16), DU(44)
      CALL DU44(44,VX,VY,VZ,PX,PY,PZ,DU)
      DO 20 I=1,16
        SI=0.0
        DO 10 J=1,44
          SI=SI + T(J,I)*DU(J)
10      CONTINUE
        DV(I)=SI
20 CONTINUE
      RETURN
      END

```

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$\begin{aligned} v(A_i) &= C_{4i-3} & \partial_x v(A_i) &= C_{4i-2} \\ \partial_y v(A_i) &= C_{4i-1} & \partial_z v(A_i) &= C_{4i} , \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

#### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

#### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{4i-3}(v) &:= v(A_i), & Q_{4i-2}(v) &:= \partial_x v(A_i), \\ Q_{4i-1}(v) &:= \partial_y v(A_i), & Q_{4i}(v) &:= \partial_z v(A_i), \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$



(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

Démonstration.

Voir CIARLET [3], Theorem 3.1.4.

Remarque.

Pour satisfaire les deux inclusions continues, les conditions suivantes sont suffisantes

$$k+1 > s + \frac{n}{p},$$

$$\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{k+1-m}{n}.$$

Les éléments de référence considérés dans ce travail satisfont  $n = 2$  ou  $3$ ,  $s = 1$ ,  $k = 2$ ; nous supposons par la suite que  $p \in ]\frac{n}{2}, \infty]$ . Comme on a seulement  $\tilde{U} \subset W^{2,\infty}(\tilde{K})$ , nous supposons que  $m = 0, 1$  ou  $2$ .

Théorème 9.1-3.

$c$  désignant une constante générique ne dépendant que de  $\tilde{K}$ , on a

$$\|\ell\| \leq c h,$$

$$\|\ell^{-1}\| \leq \frac{c}{\rho},$$

$$|\det \ell| \leq c h^n,$$

$$|\det \ell|^{-1} \leq \frac{c}{\rho^n}.$$

Démonstration.

Voir par exemple CIARLET [3], § 3.1.

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & , & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

Nous devons satisfaire la condition 3.3-(iv):

- (i) La restriction de la dérivée normale  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 1$  à une variable,  $i = 1, 2, 3$ .

En tenant compte du fait que, pour  $u \in U$ , la restriction de  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 2$  à une variable, la condition à satisfaire s'écrit de façon équivalente

$$(ii) \quad \partial_{n_i} u (B_i) = \frac{1}{2} \{ \partial_{n_i} u (A_j) + \partial_{n_i} u (A_k) \}$$

c'est-à-dire

$$(iii) \quad G_i(u) = \frac{1}{2} \{ (n_i)_x F_{j1}(u) + (n_i)_y F_{j2}(u) + (n_i)_x F_{k1}(u) + (n_i)_y F_{k2}(u) \}$$

où  $(i, j, k)$  est une permutation cyclique des nombres  $(1, 2, 3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Précisons comment se calcule la solution de ce problème élément fini avec contraintes (voir 2.8).

#### Problème d'interpolation.

Soit  $c \in \mathbb{R}^9$  donné. Le problème d'interpolation 3.3-(iii) est résolu comme suit.

a) Nous calculons la valeur des trois paramètres remplacés

$$c_{10} = \frac{1}{2} \{ (n_1)_x c_5 + (n_1)_y c_6 + (n_1)_x c_8 + (n_1)_y c_9 \},$$

$$c_{11} = \frac{1}{2} \{ (n_2)_x c_8 + (n_2)_y c_9 + (n_2)_x c_2 + (n_2)_y c_3 \},$$

$$c_{12} = \frac{1}{2} \{ (n_3)_x c_2 + (n_3)_y c_3 + (n_3)_x c_5 + (n_3)_y c_6 \}.$$

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & , & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & , & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$



(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

Nous devons satisfaire la condition 3.3-(iv):

- (i) La restriction de la dérivée normale  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 1$  à une variable,  $i = 1, 2, 3$ .

En tenant compte du fait que, pour  $u \in U$ , la restriction de  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 2$  à une variable, la condition à satisfaire s'écrit de façon équivalente

$$(ii) \quad \partial_{n_i} u (B_i) = \frac{1}{2} \{ \partial_{n_i} u (A_j) + \partial_{n_i} u (A_k) \}$$

c'est-à-dire

$$(iii) \quad G_i(u) = \frac{1}{2} \{ (n_i)_x F_{j1}(u) + (n_i)_y F_{j2}(u) \\ + (n_i)_x F_{k1}(u) + (n_i)_y F_{k2}(u) \}$$

où  $(i, j, k)$  est une permutation cyclique des nombres  $(1, 2, 3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Précisons comment se calcule la solution de ce problème élément fini avec contraintes (voir 2.8).

#### Problème d'interpolation.

Soit  $c \in \mathbb{R}^9$  donné. Le problème d'interpolation 3.3-(iii) est résolu comme suit.

a) Nous calculons la valeur des trois paramètres remplacés

$$c_{10} = \frac{1}{2} \{ (n_1)_x c_5 + (n_1)_y c_6 + (n_1)_x c_8 + (n_1)_y c_9 \},$$

$$c_{11} = \frac{1}{2} \{ (n_2)_x c_8 + (n_2)_y c_9 + (n_2)_x c_2 + (n_2)_y c_3 \},$$

$$c_{12} = \frac{1}{2} \{ (n_3)_x c_2 + (n_3)_y c_3 + (n_3)_x c_5 + (n_3)_y c_6 \}.$$

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\Pi_c v - \Pi_d v &= \sum_{i=1}^4 \partial_{\ell(\tilde{m}_i)} (\Pi_c v - \Pi_d v)(C_i) \varphi_{28+i} \circ L^{-1} \\
&\quad + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \partial_{\ell(\tilde{m}_i)} (\Pi_c v - \Pi_d v)(C_{ij}) \varphi_{29+3i+j} \circ L^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^4 \langle \ell(\tilde{m}_i), m_i \rangle H_i (\Pi_c v - \Pi_d v) \varphi_{28+i} \circ L^{-1} \\
&\quad + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \langle \ell(\tilde{m}_i), m_i \rangle H_{ij} (\Pi_c v - \Pi_d v) \varphi_{29+3i+j} \circ L^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^4 \langle \ell(\tilde{m}_i), m_i \rangle H_i (\Pi_c v - v) \varphi_{28+i} \circ L^{-1} \\
&\quad + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \langle \ell(\tilde{m}_i), m_i \rangle H_{ij} (\Pi_c v - v) \varphi_{29+3i+j} \circ L^{-1}.
\end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant les majorations obtenues pour le premier, le deuxième et le troisième terme avec  $m = 1$ ,  $q = \infty$ ,  $p > \frac{3}{2}$  et  $v \in W^{3,p}(S)$

$$\begin{aligned}
|H_i (\Pi_c v - v)| &\leq c |v - \Pi_c v|_{1,\infty,S} \\
&\leq c |v - \Pi_a v|_{1,\infty,S} + c |\Pi_a v - \Pi_b v|_{1,\infty,S} + c |\Pi_b v - \Pi_c v|_{1,\infty,S} \\
&\leq \frac{h^3}{\rho^{1+3/p}} |v|_{3,p,S} \{c + c \frac{h}{\rho} + c\} \\
&\leq c(\sigma) \frac{h^3}{\rho^{1+3/p}} |v|_{3,p,S}.
\end{aligned}$$

De même

$$|H_{ij} (\Pi_c v - v)| \leq c(\sigma) \frac{h^3}{\rho^{1+3/p}} |v|_{3,p,S}$$

pour  $i = 1(1)4$  et  $j = 1, 2, 3$ .

Définition 8.

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,

$T$  un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m$  avec

$$T \cap \Omega \neq \emptyset \text{ et } 1 \leq m < n,$$

$v: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Nous dirons que " $v|_{T \cap \Omega}$ , considéré comme une fonction de  $m$  variables, est un polynôme de degré  $\leq k$ " ou bien que " $v|_{T \cap \Omega}$  est un polynôme de degré  $\leq k$  à  $m$  variables" si et seulement si, pour une paramétrisation affine  $p: \mathbb{R}^m \longrightarrow T$ , la fonction  $v \circ p$  définie sur  $p^{-1}(T \cap \Omega)$  est un polynôme de degré  $\leq k$ .

Notation.

Soient  $\Omega$  ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $A \in \bar{\Omega}$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Nous utiliserons la notation suivante

$$\partial_{\xi} v(A) := Dv(A)(\xi)$$

c'est-à-dire

$$\partial_{\xi} v(A) = \xi_1 \partial_{x_1} v(A) + \dots + \xi_n \partial_{x_n} v(A).$$

1.2. Enoncé du problème élément fini.

Soit  $S$  un tétraèdre fermé, non dégénéré, de sommets  $A_1, A_2, A_3, A_4$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous cherchons un espace linéaire  $V = V(S) \subset C^1(\bar{S})$  possédant les propriétés suivantes.

- (i) Les fonctions de  $V$  sont de classe  $C^2$  presque partout; leurs dérivées partielles d'ordre deux sont bornées.
- (ii)  $V$  contient tous les polynômes de degré  $\leq 2$  à trois variables.

Démonstration.

Voir CIARLET [3], Theorem 3.1.4.

Remarque.

Pour satisfaire les deux inclusions continues, les conditions suivantes sont suffisantes

$$k+1 > s + \frac{n}{p},$$

$$\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{k+1-m}{n}.$$

Les éléments de référence considérés dans ce travail satisfont  $n = 2$  ou  $3$ ,  $s = 1$ ,  $k = 2$ ; nous supposons par la suite que  $p \in ]\frac{n}{2}, \infty]$ . Comme on a seulement  $\tilde{U} \subset W^{2,\infty}(\tilde{K})$ , nous supposons que  $m = 0, 1$  ou  $2$ .

Théorème 9.1-3.

$c$  désignant une constante générique ne dépendant que de  $\tilde{K}$ , on a

$$\|\ell\| \leq c h,$$

$$\|\ell^{-1}\| \leq \frac{c}{\rho},$$

$$|\det \ell| \leq c h^n,$$

$$|\det \ell|^{-1} \leq \frac{c}{\rho^n}.$$

Démonstration.

Voir par exemple CIARLET [3], § 3.1.

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

Lemme 9.4-1.

Dans l'élément de référence avec paramètres libres  $a = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_4)$ , l'élément de la base de Lagrange correspondant au paramètre  $\tilde{G}_{ij}$  est

$$\varphi_{13+3i+j}^a(x, y, z) = \tilde{w}_{ij}(\phi_i \hat{u}_i; x, y, z),$$

$i = 1(1)4, j = 1, 2, 3.$

Démonstration.

Nous avons vu dans 5.2 que la matrice d'interpolation par rapport à la base  $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{28}$  est

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{16} & 0 \\ M & I_{12} \end{bmatrix}.$$

Cherchons la base de Lagrange

$$\varphi_n^a = \sum_{m=1}^{28} r_{mn} \tilde{u}_m, \quad n = 1(1)28.$$

D'après 2.6, la matrice  $R = (r_{mn})$  est l'inverse de  $\begin{bmatrix} \tilde{Q} \end{bmatrix}$ ,

$$R = \begin{bmatrix} I_{16} & 0 \\ -M & I_{12} \end{bmatrix}.$$

Ainsi  $\varphi_n^a = u_n$  pour  $n = 17(1)28$ .



L'élément élargi est décrit sous 5.3. Rappelons que

- l'espace des fonctions est

$$U_{a(S)} = \{\tilde{u} \circ L^{-1}; \tilde{u} \in \tilde{U}_{a(S)}\}$$



Démonstration.

Voir CIARLET [3], Theorem 3.1.4.

Remarque.

Pour satisfaire les deux inclusions continues, les conditions suivantes sont suffisantes

$$k+1 > s + \frac{n}{p},$$

$$\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{k+1-m}{n}.$$

Les éléments de référence considérés dans ce travail satisfont  $n = 2$  ou  $3$ ,  $s = 1$ ,  $k = 2$ ; nous supposons par la suite que  $p \in ]\frac{n}{2}, \infty]$ . Comme on a seulement  $\tilde{U} \subset W^{2,\infty}(\tilde{K})$ , nous supposons que  $m = 0, 1$  ou  $2$ .

Théorème 9.1-3.

$c$  désignant une constante générique ne dépendant que de  $\tilde{K}$ , on a

$$\|\ell\| \leq c h,$$

$$\|\ell^{-1}\| \leq \frac{c}{\rho},$$

$$|\det \ell| \leq c h^n,$$

$$|\det \ell|^{-1} \leq \frac{c}{\rho^n}.$$

Démonstration.

Voir par exemple CIARLET [3], § 3.1.

Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$

Nous devons satisfaire la condition 3.3-(iv):

- (i) La restriction de la dérivée normale  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 1$  à une variable,  $i = 1, 2, 3$ .

En tenant compte du fait que, pour  $u \in U$ , la restriction de  $\partial_{n_i} u$  au côté opposé à  $A_i$  est un polynôme de degré  $\leq 2$  à une variable, la condition à satisfaire s'écrit de façon équivalente

$$(ii) \quad \partial_{n_i} u (B_i) = \frac{1}{2} \{ \partial_{n_i} u (A_j) + \partial_{n_i} u (A_k) \}$$

c'est-à-dire

$$(iii) \quad G_i(u) = \frac{1}{2} \{ (n_i)_x F_{j1}(u) + (n_i)_y F_{j2}(u) + (n_i)_x F_{k1}(u) + (n_i)_y F_{k2}(u) \}$$

où  $(i, j, k)$  est une permutation cyclique des nombres  $(1, 2, 3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Précisons comment se calcule la solution de ce problème élément fini avec contraintes (voir 2.8).

#### Problème d'interpolation.

Soit  $c \in \mathbb{R}^9$  donné. Le problème d'interpolation 3.3-(iii) est résolu comme suit.

a) Nous calculons la valeur des trois paramètres remplacés

$$c_{10} = \frac{1}{2} \{ (n_1)_x c_5 + (n_1)_y c_6 + (n_1)_x c_8 + (n_1)_y c_9 \},$$

$$c_{11} = \frac{1}{2} \{ (n_2)_x c_8 + (n_2)_y c_9 + (n_2)_x c_2 + (n_2)_y c_3 \},$$

$$c_{12} = \frac{1}{2} \{ (n_3)_x c_2 + (n_3)_y c_3 + (n_3)_x c_5 + (n_3)_y c_6 \}.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$\begin{aligned} v(A_i) &= C_{4i-3} & \partial_x v(A_i) &= C_{4i-2} \\ \partial_y v(A_i) &= C_{4i-1} & \partial_z v(A_i) &= C_{4i} , \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{4i-3}(v) &:= v(A_i), & Q_{4i-2}(v) &:= \partial_x v(A_i), \\ Q_{4i-1}(v) &:= \partial_y v(A_i), & Q_{4i}(v) &:= \partial_z v(A_i), \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |\varphi_{17}^{a(S)} \circ L^{-1}|_{m,q,S} \\
& \leq |r_0 \circ L^{-1}|_{m,q,S} + c(\sigma) \{ |r_1 \circ L^{-1}|_{m,q,S} + |r_2 \circ L^{-1}|_{m,q,S} + |r_3 \circ L^{-1}|_{m,q,S} \} \\
& \leq c \frac{h^{3/q}}{\rho^m} |r_0|_{m,q,\tilde{S}} + c(\sigma) \frac{h^{3/q}}{\rho^m} \{ |r_1|_{m,q,\tilde{S}} + |r_2|_{m,q,\tilde{S}} + |r_3|_{m,q,\tilde{S}} \} \\
& \leq c(\sigma) \frac{h^{3/q}}{\rho^m}.
\end{aligned}$$

D'une façon analogue, on peut montrer qu'il existe une constante générique  $c(\sigma)$  indépendante de  $S$  telle que, pour  $n = 17(1)28$ ,

$$|\varphi_n^{a(S)} \circ L^{-1}|_{m,q,S} \leq c(\sigma) \frac{h^{3/q}}{\rho^m}.$$



#### Démonstration du théorème 9.4.

Pour analyser l'erreur d'interpolation  $v - \Pi v$ , nous utiliserons trois autres interpolations.

L'interpolation  $\Pi_p$  est l'interpolation au moyen de l'élément polynomial de référence 4.3 et de ses équivalents affines; en particulier

- l'espace des interpolants  $V_p$  est un sous-espace linéaire des polynômes de degré  $\leq 3$  sur le tétraèdre  $S$ ;  $\dim V_p = 16$ ;
- les paramètres de  $\Pi_p$  sont affines-équivalents aux paramètres de référence  $\tilde{F}_{ij}$ ,  $j = 0(1)3$ ,  $i = 1(1)4$ .

Pour des paramètres libres  $a := (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \hat{\mu}_4)$  fixés indépendamment de  $S$ , l'interpolation  $\Pi_a$  est effectuée à l'aide de la famille des affines-équivalents à l'élément de référence;

l'espace des fonctions est

$$U_a = \{\tilde{u} \circ L^{-1}; \tilde{u} \in \tilde{U}_a\}.$$

Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$

Deuxième terme.

On a  $(\Pi_p v - \Pi_{a(S)} v)(A_i) = 0$ ,  $\text{grad}(\Pi_p v - \Pi_{a(S)} v)(A_i) = 0$ ,

$i = 1(1)4$ .  $\Pi_p v - \Pi_{a(S)} v$  est un élément de  $U_{a(S)}$  que nous exprimons au moyen de la base de Lagrange

$$\begin{aligned} \Pi_p v - \Pi_{a(S)} v &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \partial_{\ell}(\tilde{n}_{ij}) (\Pi_p v - \Pi_{a(S)} v)(B_{ij}) \varphi_{13+3i+j}^{a(S)} \circ L^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \partial_{\ell}(\tilde{n}_{ij}) (\Pi_p v - v)(B_{ij}) \varphi_{13+3i+j}^{a(S)} \circ L^{-1}. \end{aligned}$$

Nous utilisons la majoration obtenue pour le premier terme avec

$$m = 1, q = \infty, p > \frac{3}{2},$$

$$\begin{aligned} &|\partial_{\ell}(\tilde{n}_{ij}) (\Pi_p v - v)(B_{ij})| \\ &\leq c \|\ell(\tilde{n}_{ij})\| |v - \Pi_p v|_{1, \infty, S} \\ &\leq ch |v - \Pi_p v|_{1, \infty, S} \\ &\leq c \frac{h^4}{\rho^{1+3/p}} |v|_{3, p, S}. \end{aligned}$$

Avec  $\frac{h}{\rho} \leq \sigma$ ,  $m = 0, 1, 2$ ,  $q \in [1, \infty]$ , d'après le lemme 9.4-3,

$$|\varphi_n^{a(S)} \circ L^{-1}|_{m, q, S} \leq c(\sigma) \frac{h^{3/q}}{\rho^m} \text{ pour } n = 17(1)28.$$

Ainsi, pour  $m = 0, 1, 2$ ,  $q \in [1, \infty]$ ,  $p \in ]\frac{3}{2}, \infty]$ ,  $v \in W^{3, p}(S)$

et  $S$  avec  $\frac{h(S)}{\rho(S)} \leq \sigma$ ,

$$|\Pi_p v - \Pi_{a(S)} v|_{m, q, S} \leq c(\sigma) \frac{h^{4+3/q}}{\rho^{m+1+3/p}} |v|_{3, p, S},$$

$$|\Pi_p v - \Pi_{a(S)} v|_{m, p, S} \leq c(\sigma) h^{3-m} |v|_{3, p, S}.$$

Exemple.

Reprenons l'exemple 2.2. Notons  $x_1 := A_1$ ,  $x_2 := A_2$ ,  $h := x_2 - x_1$ .

Pour les quatre éléments de  $W$

$$u_1(x) := 1$$

$$u_2(x) := (x - x_1)$$

$$u_3(x) := (x - x_1)^2$$

$$u_4(x) := (x - x_1)^2 (x - x_2),$$

la matrice d'interpolation est triangulaire inférieure

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & h^2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple,  $U = W$  et le problème d'interpolation est  $W$ -unisolvant.

Soit  $c := (0, 0, 1, 0)^T$ . La résolution de  $Qu = c$  s'opère en deux temps;

(i) on résoud  $[Q]s = c$ ; on trouve

$$s = (0, 0, h^{-2}, 2h^{-3})^T \in \mathbb{R}^4;$$

(ii) on pose  $u = \sum_{i=1}^4 s_i u_i$ ; on trouve

$$u(x) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)^2 - \frac{2}{h^3}(x - x_1)^2(x - x_2).$$



Quatrième terme.

On a  $(\Pi_Q v - \Pi v)(A_i) = 0$  et  $\text{grad}(\Pi_Q v - \Pi v)(A_i) = 0$ ,

$i = 1(1)4$ .  $\Pi_Q v - \Pi v$  est un élément de  $U_a(S)$  que nous exprimons au moyen de la base de Lagrange

$$\Pi_Q v - \Pi v = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \partial_{\ell(\tilde{n}_{ij})} (\Pi_Q v - \Pi v)(B_{ij}) \varphi_{13+3i+j}^{a(S)} \cdot L^{-1}.$$

Comme  $\Pi_Q v - \Pi v$  est un polynôme de degré  $\leq 3$  par rapport à l'abscisse curviligne le long des arêtes, il s'ensuit que

$\Pi_Q v - \Pi v$  s'annule le long des arêtes. Par suite,

$$\Pi_Q v - \Pi v = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \langle \ell(\tilde{n}_{ij}), n_{ij} \rangle G_{ij}(\Pi_Q v - \Pi v) \varphi_{13+3i+j}^{a(S)} \cdot L^{-1}.$$

Soit  $w \in W^{2,p}(S)$ ,  $p > \frac{3}{2}$ . Notons  $\Pi_{\ell} w$  l'interpolation linéaire de  $w$  sur le tétraèdre  $S$  avec les paramètres  $w(A_1), w(A_2), w(A_3), w(A_4)$ .

Soit  $(i, j, k, \ell)$  une permutation cyclique des nombres  $(1, 2, 3, 4)$ .

Alors, par définition de  $\Pi v$  (voir 5.4),

$$\begin{aligned} & G_{ij}(\Pi_Q v - \Pi v) \\ &= \begin{cases} \partial_{n_{i1}} v(B_{i1}) - \frac{1}{2} \{ \partial_{n_{i1}} v(A_k) + \partial_{n_{i1}} v(A_{\ell}) \} & \text{si } j = 1, \\ \partial_{n_{i2}} v(B_{i2}) - \frac{1}{2} \{ \partial_{n_{i2}} v(A_{\ell}) + \partial_{n_{i2}} v(A_j) \} & \text{si } j = 2, \\ \partial_{n_{i3}} v(B_{i3}) - \frac{1}{2} \{ \partial_{n_{i3}} v(A_j) + \partial_{n_{i3}} v(A_k) \} & \text{si } j = 3, \end{cases} \\ &= \{ \partial_{n_{ij}} v - \Pi_{\ell}(\partial_{n_{ij}} v) \} (B_{ij}). \end{aligned}$$

Nous utilisons le théorème 9.1-2 pour  $\Pi_{\ell}$  avec  $n = 3$ ,  $k = 1$ ,

$s = 0$ ,  $m = 0$ ,  $q = \infty$ ,  $p > \frac{3}{2}$ ; pour  $w = \partial_{n_{ij}} v \in W^{2,p}(S)$

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

Dans le cas  $p = \infty$ ,

$$\begin{aligned}
 & |v - \Pi_n v|_{m, \infty, \Omega} \\
 &= \max_{k=1(1)K_n} |v - \Pi_n v|_{m, \infty, S_{k,n}} \\
 &\leq \max_{k=1(1)K_n} c(\sigma) h_n^{3-m}(S_{k,n}) |v|_{3, \infty, S_{k,n}} \\
 &\leq c(\sigma) h_n^{3-m} \max_{k=1(1)K_n} |v|_{3, \infty, S_{k,n}} \\
 &= c(\sigma) h_n^{3-m} |v|_{3, \infty, \Omega} .
 \end{aligned}$$

(ii) Soient  $p \in ]\frac{3}{2}, \infty[$ ,  $v \in W^{2,p}(\Omega)$  et  $\varepsilon > 0$  donnés. Etant donné que  $\Omega$  est un polyèdre borné et que  $p < \infty$ ,  $C^\infty(\bar{\Omega})$  est dense dans  $W^{2,p}(\Omega)$ ; il existe donc  $w_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$  tel que  $\|v - w_\varepsilon\|_{2,p,\Omega} < \varepsilon/2$ . Par la première partie du théorème,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Pi_n w_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{2,p,\Omega} = 0;$$

il existe ainsi un  $N_\varepsilon$  tel que  $\forall n \geq N_\varepsilon \|\Pi_n w_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{2,p,\Omega} < \varepsilon/2$ .

Posons  $w_{n,\varepsilon} := \Pi_n w_\varepsilon$ ; nous aurons finalement

$$w_{n,\varepsilon} \in V_n \text{ et } \|v - w_{n,\varepsilon}\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon .$$



(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$\begin{aligned} v(A_i) &= C_{4i-3} & \partial_x v(A_i) &= C_{4i-2} \\ \partial_y v(A_i) &= C_{4i-1} & \partial_z v(A_i) &= C_{4i} , \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{4i-3}(v) &:= v(A_i), & Q_{4i-2}(v) &:= \partial_x v(A_i), \\ Q_{4i-1}(v) &:= \partial_y v(A_i), & Q_{4i}(v) &:= \partial_z v(A_i), \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i} ,$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$v(A_i) = C_{4i-3} \quad \partial_x v(A_i) = C_{4i-2}$$

$$\partial_y v(A_i) = C_{4i-1} \quad \partial_z v(A_i) = C_{4i},$$

$$i = 1(1)4.$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$Q_{4i-3}(v) := v(A_i), \quad Q_{4i-2}(v) := \partial_x v(A_i),$$

$$Q_{4i-1}(v) := \partial_y v(A_i), \quad Q_{4i}(v) := \partial_z v(A_i),$$

$$i = 1(1)4.$$



$$\begin{aligned}
r_{\mu\nu}^{\alpha\beta} &= \int_{\tilde{S}} \partial^\alpha (\tilde{u}_\sigma \cdot \alpha_i^{-1}) \partial^\beta (\tilde{u}_\tau \cdot \alpha_i^{-1}) \\
&= \int_{\tilde{S}} \left\{ \sum_{|\gamma|=|\alpha|} c_Y^\alpha(i) \partial^\gamma \tilde{u}_\sigma \right\} \cdot \alpha_i^{-1} \left\{ \sum_{|\delta|=|\beta|} c_\delta^\beta(i) \partial^\delta \tilde{u}_\tau \right\} \cdot \alpha_i^{-1} \\
&= \sum_{|\gamma|=|\alpha|} \sum_{|\delta|=|\beta|} c_Y^\alpha(i) c_\delta^\beta(i) \int_{\alpha_i(\tilde{S})} (\partial^\gamma \tilde{u}_\sigma \partial^\delta \tilde{u}_\tau) \cdot \alpha_i^{-1} \\
&= \sum_{|\gamma|=|\alpha|} \sum_{|\delta|=|\beta|} c_Y^\alpha(i) c_\delta^\beta(i) r_{\sigma\tau}^{\gamma\delta}.
\end{aligned}$$

### Deuxième réduction.

Notons  $\tilde{P}$  l'espace linéaire engendré par  $\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{16}\}$ ,

$$\tilde{F} := \begin{bmatrix} \tilde{F}_{10} \\ \tilde{F}_{11} \\ \tilde{F}_{12} \\ \tilde{F}_{13} \\ \tilde{F}_{20} \\ \dots \\ \tilde{F}_{43} \end{bmatrix} : \tilde{P} \longrightarrow \mathbb{R}^{16} \text{ (voir 4.1).}$$

D'après 4.3, le problème d'interpolation  $\tilde{F}$  est  $\tilde{P}$ -unisolvant;

$\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{16}\}$  est la base de Lagrange de  $\tilde{F}$ . Etant donné que pour

$\mu = 1(1)16$   $\partial^{\alpha\tilde{u}}_\mu \in \tilde{P}$ , nous aurons

$$\partial^{\alpha\tilde{u}}_\mu = \sum_{\sigma=1}^{16} \pi_{\sigma\mu}^\alpha \tilde{u}_\sigma$$

$$\text{avec } \pi_{1\mu}^\alpha := \tilde{F}_{10}(\partial^{\alpha\tilde{u}}_\mu), \dots, \pi_{16\mu}^\alpha := \tilde{F}_{43}(\partial^{\alpha\tilde{u}}_\mu).$$

Par suite,

$$r_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \sum_{\sigma=1}^{16} \pi_{\sigma\mu}^\alpha r_{\sigma\nu}^{(ooo)\beta} \text{ si } 0 \leq \mu \leq 16,$$

$$r_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \sum_{\tau=1}^{16} \pi_{\tau\nu}^\beta r_{\mu\tau}^{\alpha(ooo)} \text{ si } 0 \leq \nu \leq 16.$$

Soient  $E_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un homomorphisme et  
 $E_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  un automorphisme.

La construction ci-dessous consiste à remplacer les paramètres  
 $G_1, \dots, G_q$  par les  $q$  contraintes linéaires  $E_2 Gw = E_1 Fw$ .

Soient  $E := \begin{bmatrix} -E_1 & E_2 \end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  
 $H: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $H := EQ = -E_1 F + E_2 G$ .

Le problème d'interpolation

$$F: \ker H \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est  $\ker H$ -unisolvant. En effet,

$$\begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on se trouve dans la situation de 2.7.

Pratiquement, la solution  $w \in \ker H$  de  $Fw = c \in \mathbb{R}^p$  est déterminée en résolvant successivement les équations

$$E_2 c_2 = E_1 c,$$

$$Q w = \begin{bmatrix} c \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^p \longrightarrow W$ ,  $T(c) := w$ , peut s'écrire

$$T = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ E_2^{-1} \cdot E_1 \end{bmatrix}.$$

(iii) Pour seize nombres réels  $C_1, \dots, C_{16}$  donnés, il existe un et un seul élément  $v \in V$  tel que

$$\begin{aligned} v(A_i) &= C_{4i-3} & \partial_x v(A_i) &= C_{4i-2} \\ \partial_y v(A_i) &= C_{4i-1} & \partial_z v(A_i) &= C_{4i} , \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

- (iv) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux tétraèdres d'une mosaïque. Soit  $\{A_1, \dots, A_K\}$  l'ensemble des sommets de  $S_1$  et  $S_2$ . Pour  $4K$  nombres réels donnés, le problème d'interpolation (iii) détermine une fonction  $v_1$  définie sur  $S_1$  et  $v_2$  définie sur  $S_2$ . Nous exigeons que  $v_1$  et  $v_2$  coïncident sur  $S_1 \cap S_2$  et définissent ensemble une fonction continûment différentiable sur  $S_1 \cup S_2$ .
- (v) L'espace  $V$  et la solution  $v \in V$  du problème d'interpolation (iii) ne dépendent pas de la numérotation des quatre sommets de  $S$ .

### Remarque 1.

La propriété (i) entraîne que  $\forall v \in V$ , les dérivées partielles d'ordre deux de  $v$  appartiennent à  $L^\infty(S)$ . En particulier,  $V(S) \subset H^2(S)$ .

### Remarque 2.

Définissons  $Q: C^1(\bar{S}) \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{4i-3}(v) &:= v(A_i), & Q_{4i-2}(v) &:= \partial_x v(A_i), \\ Q_{4i-1}(v) &:= \partial_y v(A_i), & Q_{4i}(v) &:= \partial_z v(A_i), \\ i &= 1(1)4. \end{aligned}$$

- [ 8] J. DESCLOUX: Basic properties of Sobolev spaces. Approximation by finite elements. Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Switzerland, 1975.
- [ 9] G. DUPUIS and J.-J. GOËL: Finite element with high degree of regularity. Int. J. Num. Meth. Eng. 2, 809-820 (1970).
- [10] J.-J. GOËL: Construction of basic functions for numerical utilization of Ritz's method. Numer. Math. 12, 435-447 (1968).
- [11] J.L. GOUT: Estimation de l'erreur d'interpolation d'Hermite dans  $\mathbb{R}^n$ . Numer. Math. 28, 407-429 (1977).
- [12] G. STRANG, G. FIX: An analysis of the finite element method. Prentice-Hall, 1973.
- [13] A.H. STROUD: Approximate calculation of multiple integrals. Prentice-Hall, 1971.

J'exprime ici toute ma reconnaissance à Monsieur le professeur Jean-Jacques Goël. Il m'a fait bénéficier de sa grande expérience de la construction d'éléments finis. Grâce à sa disponibilité et à ses encouragements, il m'a donné rapidement les moyens de travailler de façon autonome.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur le professeur Jean Descloux dont les précieux conseils m'ont permis d'achever et de présenter cette thèse.



## C U R R I C U L U M    V I T A E

- 1948 - 1963    Marcel Déléze est né à Nendaz (Valais), dans sa commune d'origine, le 14 février 1948. Il fréquente l'école primaire de Fully (VS), puis l'école secondaire de Martigny.
- 1963 - 1968    Il entre à l'Ecole Normale des Instituteurs de Sion. Il obtient le diplôme d'enseignement primaire.
- 1968 - 1971    A l'Université de Fribourg, il étudie les mathématiques, la physique, la chimie, la géographie et la pédagogie. Il reçoit le diplôme d'enseignement secondaire.
- 1971 - 1975    Il poursuit ses études dans le cadre du diplôme de mathématiques. Les branches principales choisies sont l'analyse et les mathématiques appliquées. L'algèbre, la physique théorique et la physique expérimentale ont été choisies comme branches secondaires. Le diplôme de mathématiques lui est décerné en avril 1975.
- 1975 - 1978    Il est assistant auprès de l'Institut de mathématiques de l'Université de Fribourg. Il se spécialise dans le domaine de l'analyse numérique. Il rédige cette thèse sous la direction du professeur J.-J. Goël. Après la mort de ce dernier survenue en mai 1978, le professeur Jean Descloux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne accepte de corriger le manuscrit et de devenir le premier rapporteur de la thèse.